
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01180539 7

Qu'il soit permis à l'auteur de dédier ce travail

A M. LE PROFESSEUR

G. MITTAG-LEFFLER

A L'OCCASION DE

son Soixante-Quinzième Anniversaire

LE 16 MARS 1921,

en témoignage de profonde reconnaissance et en hommage à son génie, à la noblesse et la générosité de ses desseins.

En écrivant ce livre, l'auteur a eu l'avantage de pouvoir se servir des ressources uniques de la bibliothèque de M. Mittag-Leffler. Sans le précieux appui que M. Mittag-Leffler lui a prêté en toutes circonstances, il lui aurait été impossible d'entreprendre ce travail.

Mars 1921.

A. Mac Leod.

Gand, impr. Plantijn

INTRODUCTION

A LA

Géométrie Non-Euclidienne

PAR

A. MAC LEOD

Docteur en Sciences Physiques et Mathématiques (Gand)

Avec une planche.

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE J. HERMANN

6, RUE DE LA SORBONNE, 6

—

1922

TABLE DES MATIÈRES.

Pour le rôle des figures dans ce travail, voir la note au § 155.

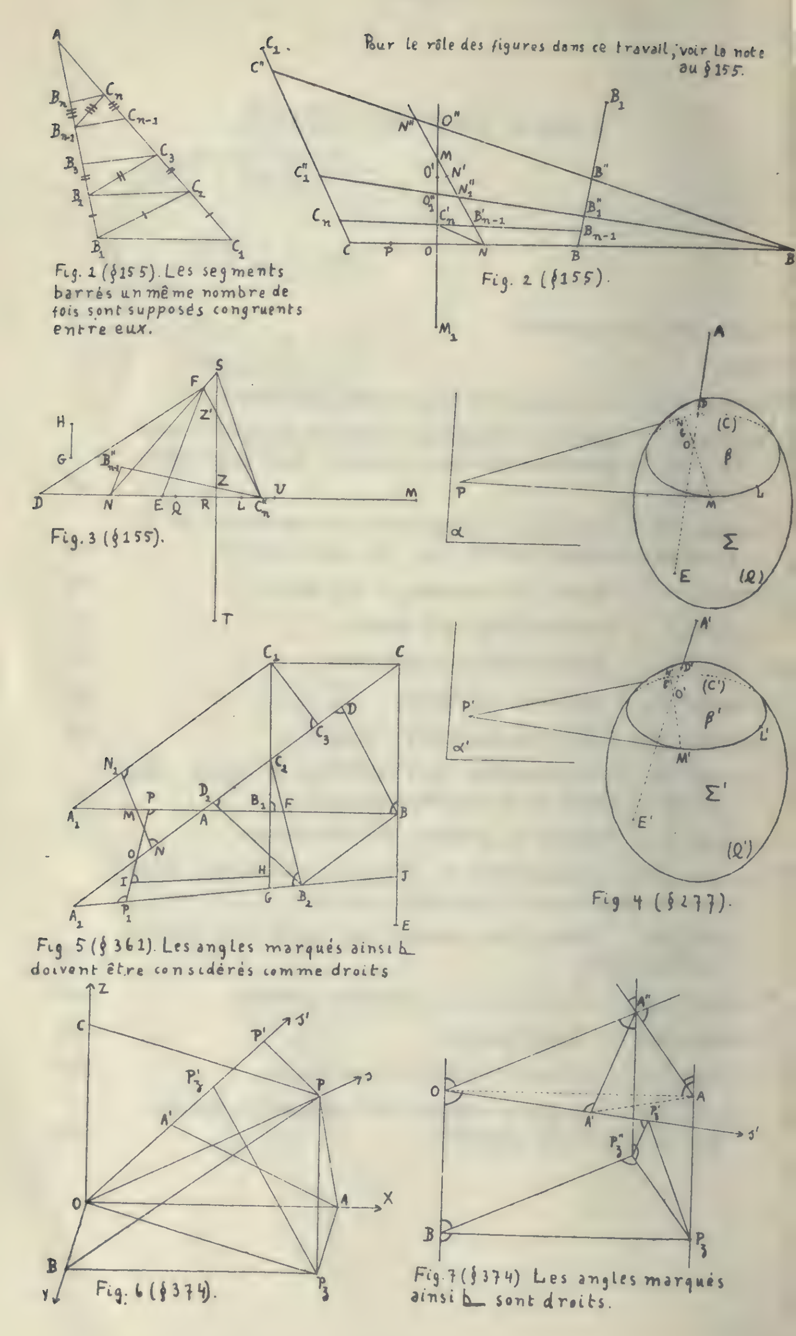


Fig. 1 (§ 155). Les segments barrés un même nombre de fois sont supposés congruents entre eux.

Fig. 2 (§ 155).

Fig. 3 (§ 155).

Fig 4 (§ 277).

Fig 5 (§ 361). Les angles marqués ainsi ⊾ doivent être considérés comme droits

Fig. 6 (§ 374).

Fig. 7 (§ 374) Les angles marqués ainsi ⊾ sont droits.

PRÉFACE

Dans ce livre, nous visons à exposer d'une façon élémentaire les principes de la géométrie non-euclidienne. Nous nous sommes attachés avant tout à fournir un exposé méthodique du sujet et à rendre les démonstrations complètes et rigoureuses. Nous passons presque complètement sous silence le développement historique de la géométrie non-euclidienne, vu qu'il existe d'excellents ouvrages traitant le sujet de ce dernier point de vue, par exemple ROBERTO BONOLA : « La geometria non-euclidea. Esposizione storico-critica del suo sviluppo. »(1)

Les connaissances préalables exigées du lecteur qui dépassent le domaine des mathématiques élémentaires rentrent en général dans le cadre des matières suivantes : les éléments de la géométrie analytique à deux et à trois dimensions et leur application à l'étude des propriétés fondamentales des courbes et des surfaces du second degré; quelques notions de la théorie des déterminants; les premiers éléments de l'analyse infinitésimale.

Parmi les nombreuses méthodes qu'on peut suivre pour exposer élémentairement les principes de la géométrie non-euclidienne, une des meilleures nous semble celle qu'on trouve dans l'ouvrage suivant : « The elements of non-euclidean geometry », par J. L. COOLIDGE, Oxford 1909. Nous avons emprunté le plan du présent travail à cet ouvrage. Notre travail embrasse à peu près la matière exposée dans les sept premiers chapitres du livre de

(1) Bologna 1906; traduction anglaise par H. S. CARSLAW, Chicago 1912; trad. allemande par H. LIEBMANN, 2e éd., Leipzig et Berlin 1919.

M. Coolidge. Souvent nous suivons les développements de M. Coolidge d'assez près. Mais il y a aussi entre le travail de cet auteur et le notre des différences considérables, qui font que le deuxième travail, à ce qu'il nous semble, ne fait nullement double emploi avec le premier. Nous nous bornerons à indiquer ici deux de ces différences.

M. Coolidge a concentré dans un espace relativement restreint (291 pages) des matières extrêmement vastes, ce qui fait que toutes les parties de son livre sont très difficiles à lire et qu'il y a beaucoup de lacunes dans ses raisonnements. Nous avons cherché à remédier à ces défauts.

De plus, quoique le livre de M. Coolidge nous paraisse être un des meilleurs traités de géométrie non-euclidienne existant jusqu'à ce jour, il y a, nous semble-t-il, dans la partie du livre qui correspond au présent travail un assez grand nombre de démonstrations défectueuses. Nous nous sommes efforcés à rendre ici tous les raisonnements rigoureux. — Parmi les démonstrations de M. Coolidge qui nous semblent manquer de rigueur, nous citerons ici comme exemples la démonstration du théorème 28 du chapitre II (l. c. p. 35; voir chez nous le § 155), la démonstration du théorème 2 du chapitre III (l. c. p. 40; voir chez nous le § 165), la démonstration au chapitre IV de la continuité de la fonction $\varphi(x)$ (l. c. p. 51; voir chez nous le § 338), et enfin la démonstration, au même chapitre IV, de la formule $\cos \frac{b}{k} = \cos \frac{a}{k} \cos \frac{c}{k}$ (l. c. pp. 55, 56 et 57; voir chez nous le § 361).

Les leçons sur la géométrie non-euclidienne de M. Stuyvaert (dans son cours de méthodologie mathématique à l'Université de Gand) nous ont été d'un très grand secours pendant que nous avons écrit le présent travail.

Mars 1921.

CHAPITRE I.

Les postulats de la géométrie euclidienne.

1. De même que toute autre science, la géométrie est constituée par un ensemble de propositions qui expriment des propriétés de certains objets plus ou moins complexes. De même que les autres branches des mathématiques, la géométrie est une science déductive, c'est à dire, en d'autres mots, que les propositions géométriques sont en général des conséquences logiques les unes des autres, et que les concepts des objets géométriques sont en général définis les uns au moyen des autres, les concepts plus simples servant à définir les concepts plus complexes. Cette suite de définitions et de propositions découlant logiquement les unes des autres a un commencement, c. à d. qu'il y a dans la géométrie certains concepts qu'on ne définit pas, et certaines propositions qu'on ne démontre pas. Ces concepts que l'on ne définit pas sont appelés les *concepts fondamentaux* de la géométrie, et ces propositions que l'on ne démontre pas sont appelées les *postulats* de la géométrie.

2. Les concepts fondamentaux de la géométrie représentent différentes espèces d'objets dont nous avons dans notre esprit une certaine image que nous renonçons à définir par des mots. Remarquons en passant que nous entendons par objets aussi bien des objets proprement dits, c. à d. conçus comme existant en soi, que de simples relations entre des objets proprement dits.

Notre esprit a une tendance très forte à attribuer aux objets répondant aux concepts fondamentaux de la géométrie certaines propriétés bien déterminées. Il existe une

branche de la géométrie dans laquelle les postulats énoncent précisément ces dernières propriétés; cette branche constitue la *géométrie euclidienne* ou *parabolique à trois dimensions* (1). Cette géométrie était la seule connue jusqu'il y a un siècle environ; c'est celle dont nous présupposons les éléments connus chez le lecteur.

Au point de vue de la psychologie et de la philosophie spéculative, ces images que notre esprit possède des objets géométriques les plus simples, et cette tendance à leur attribuer certaines propriétés plutôt que d'autres dont il est le siège, sont d'une importânce capitale. Par exemple, la question de savoir d'où viennent ces images et pourquoi notre esprit a cette tendance constitue l'un des éléments essentiels du célèbre problème de l'innéité des idées.

Mais ces questions ne ressortent pas du domaine de la géométrie. Les géomètres font même de plus en plus abstraction des images et tendances dont notre esprit est le siège, et souvent on se place actuellement dans la géométrie au point de vue suivant : étant donnés les concepts fondamentaux, on peut attribuer aux objets qu'ils sont censés représenter des propriétés arbitraires, pourvu qu'elles ne soient pas contradictoires entre elles; en d'autres mots, les postulats sont arbitraires pourvu qu'ils soient compatibles. C'est à ce point de vue que nous nous placerons dans tout ce qui suit.

Nous faisons donc tout à fait abstraction des images que notre esprit possède des objets répondant aux concepts fondamentaux de la géométrie, et de la tendance à leur attribuer certaines propriétés plutôt que d'autres dont il est le siège. Avant le choix des postulats, les mots exprimant les concepts fondamentaux seront censés représenter des objets choisis n'importe comment, sans restrictions. Une fois les postulats fixés, le choix de ceux-ci étant d'ailleurs arbitraire, les mots en question

(1) Dans la suite, nous dirons, pour abréger, simplement « géométrie euclidienne » ou « parabolique ».

seront considérés comme représentant des objets choisis n'importe comment, mais assujetis à la seule condition de satisfaire aux postulats.

Par ce qui vient d'être dit, nous entrevoyons tout de suite la possibilité d'autres géométries que la géométrie euclidienne, des géométries où certaines propositions fausses dans la géométrie euclidienne seraient vraies, et où certaines propositions vraies dans la géométrie euclidienne seraient fausses.

Remarquons avant de continuer qu'il peut exister dans une même géométrie des systèmes de concepts fondamentaux et de postulats différents, mais équivalents, et également parfaits au point de vue logique. Suivant le système employé, un même concept peut être défini ou fondamental, une même proposition peut être théorème ou postulat.

3. Nous allons maintenant exposer le système des concepts fondamentaux et des postulats de la géométrie euclidienne; nous suivrons dans cet exposé, à part quelques détails, l'ouvrage suivant : « Grundlagen der Geometrie », par D. Hilbert(1). Nous passerons en revue simultanément les concepts fondamentaux, les postulats, et les définitions et théorèmes simples nécessaires pour éviter les longueurs encombrantes dans l'énoncé des postulats. L'exposé est divisé en cinq parties, d'après la nature des postulats.

I. Postulats de l'appartenance.

Concepts fondamentaux. Nous imaginons une espèce d'objets que nous appelons *points*; nous imaginons une espèce d'ensembles de points que nous appelons *droites*, et une autre espèce d'ensembles de points que nous appelons *plans*.

Définition. Nous appelons *espace* l'ensemble de tous les points qui existent.

Postulat I 1. *Etant donnés deux points distincts, il existe toujours une droite et une seule qui contient ces deux points.*

(1) Leipzig et Berlin 1913.

Postulat I 2. *Etant donnés trois points distincts qui ne sont pas sur une même droite, il existe toujours un plan et un seul qui contient ces trois points.*

Postulat I 3. *Sur une droite il y a toujours au moins deux points distincts; dans un plan il y a toujours au moins trois points distincts qui ne sont pas sur une même droite.*

Postulat I 4. *Lorsqu'un plan contient deux points distincts d'une droite, alors chaque point de la droite se trouve dans le plan.*

Postulat I 5. *Quand deux plans ont un point commun, il existe encore au moins un autre point qui est commun aux deux plans.*

Postulat I 6. *Il existe au moins quatre points distincts, non situés en ligne droite, et non coplanaires.*

Théorème I 1. *Etant donnés une droite et un point non situé sur cette droite, il existe un plan et un seul qui contient le point et la droite.*

Ce théorème se déduit facilement des postulats précédents.

II. Postulats de l'ordre.

Concept fondamental. Nous imaginons une certaine relation entre trois points distincts A, B, C d'une droite, que nous exprimons en disant que B est *situé entre* A et C.

Postulat II 1. *Quand* A, B, C *sont trois points distincts en ligne droite, et quand* B *est situé entre* A *et* C, *alors* B *est situé entre* C *et* A.

Postulat II 2. *Quand* A *et* C *sont deux points distincts, alors il existe toujours au moins un point* B *situé sur la droite* AC *entre* A *et* C, *et au moins un point* D *appartenant à la droite* AC *et tel que* C *soit situé entre* A *et* D.

Postulat II 3. *Parmi trois points distincts d'une droite, il y en a toujours un et un seulement qui est situé entre les deux autres.*

Remarque. Lorsque nous dirons à l'avenir qu'un point B est situé entre les points A et C, sans plus, nous sous-entendrons toujours que A, B, C sont distincts et situés en ligne droite.

Définition. Soient A et B deux points distincts quel-

conques. L'ensemble de points constitué par les points A et B, et par tous les points situés entre A et B, est appelé le *segment* AB; nous désignerons le segment AB par la notation (AB)[1]. D'après cette définition, (AB) et (BA) sont parfaitement identiques et l'on peut écrire indifféremment l'un ou l'autre.

Remarques Le postulat II 1 affirme que dans la relation exprimée par « B est situé entre A et C » les points A et C jouent le même rôle.

Le postulat II 2 affirme l'existence de la partie d'un segment intermédiaire entre les deux extrémités et des prolongements d'un segment au delà des deux extrémités.

Postulat II 4. *Soient* A, B, C *trois points non situés sur une même droite, et a une droite du plan* ABC *qui ne passe par aucun des trois points. Si a passe par un point de* (AB), *alors a passe aussi, à coup sûr, ou bien par un point de* (BC), *ou bien par un point de* (AC), *et ces deux éventualités ne peuvent se présenter à la fois.*

Théorème II 1. *Soient* A, A′, A″, A‴ *quatre points distincts en ligne droite;* a) *si* A″ *est entre* A *et* A‴, *et si* A′ *est entre* A *et* A″, *alors* A″ *est entre* A′ *et* A‴ *et* A′ *est entre* A *et* A‴ ; b) *si* A′ *est entre* A *et* A″, *et si* A″ *est entre* A′ *et* A‴, *alors* A″ *est entre* A *et* A‴.

Démonstration. a) Il y a au moins un point qui n'est pas sur AA‴ (postulat I 6); soit O un tel point. Menons OA, OA′, OA″, OA‴. Il existe au moins un point situé entre O et A (postulat II 2); soit B un tel point. Soit de même B‴ un point situé entre O et A‴. Menons BA″ et B‴A′.

Si BA″ passait par A, BA″ serait identique à AA‴ (postulat I 1), B serait sur AA‴, BA coïnciderait avec AA‴, O serait sur AA‴, ce qui n'est pas. Donc, BA″ ne passe pas par A. De la même façon, on voit que BA″ ne passe ni par A′, ni par A‴, ni par O, et que B‴A′ ne passe ni par A, ni par A″, ni par A‴, ni par O.

A″ n'est pas entre A et A′ (postulat II 3). Donc, BA″ ne contient aucun point de (AA′). En appliquant le

(1) Cf. Coolidge, l. c. p. 15.

postulat II 4 à BA'' et aux points O, A, A', on voit que BA'' contient un point de (OA'); soit B' ce point. En considérant BA'' et O, A, A''', on voit que BA'' ne contient aucun point de (OA'''). En considérant BA'' et O, A', A''', on voit que BA'' contient un point de $(A'A''')$. Ce point ne peut être distinct de A''. Donc, A'' est situé entre A' et A'''.

A' n'est pas entre A'' et A'''. Donc, $B'''A'$ ne contient aucun point de $(A''A''')$. En considérant $B'''A'$ et O, A'', A''', on voit que $B'''A'$ contient un point de (OA''); soit B'' ce point. En considérant $B'''A'$ et O, A, A'', on voit que $B'''A'$ ne contient aucun point de (OA). En considérant $B'''A'$ et O, A, A''', on voit que $B'''A'$ contient un point de (AA'''). Ce point ne peut être différent de A'. Donc, A' est situé entre A et A'''.

La partie a) du théorème est ainsi entièrement établie.

La partie b) se démontre sans difficulté par des raisonnements analogues (1).

Théorème II 2. *Étant donnée une droite a et un point* O *sur cette droite, il est possible, et d'une seule manière, de diviser tous les points de a distincts de* O *en deux classes jouissant de la propriété suivante : si* X *et* X' *sont deux points de la même classe,* (XX') *ne contient pas* O, *et si* X *et* Y *sont deux points de deux classes différentes,* (XY) *contient le point* O.

Démonstration. Il existe sur *a* au moins un point distinct de O (postulat I 3); soit O' un tel point.

Soit (I) l'ensemble des points de *a* distincts de O et de O' tels que O soit entre chacun de ces points et O'; soit (II) l'ensemble des points situés entre O et O'; soit (III) l'ensemble des points de *a* distincts de O et de O' tels que O' soit entre O et chacun de ces points. D'après le postulat II 3, tout point de *a* distinct de O et de O' appartient à l'une des trois classes (I), (II) ou (III), et à une seulement. Chacune de ces trois classes contient au moins

(1) Ce théorème a été démontré pour la première fois par E. H. Moore, Transactions of the American Mathematical Society, 1902, pp. 142-158.

un point (postulat H 2). Soit (X) l'ensemble des points (I) et soit (Y) l'ensemble des points (II) et (III) auquel on joint O'.

Si les deux classes dont il est question dans l'énoncé du théorème existent, elles doivent coïncider avec (X) et (Y). Démontrons que (X) et (Y) possèdent la propriété dont il est question dans l'énoncé.

Soient X' et X'' deux points quelconques de (X). O est entre O' et X'. Comparons les positions de X', O' et X''. Si X' est entre O' et X'', X' est entre O et X'' (théorème II 1), O n'appartient pas à (X'X''). Si O' était entre X' et X'', O' serait entre O et X'', ce qui n'est pas; donc, ce cas ne peut se présenter. Enfin, si X'' est entre X' et O', O ne peut être entre X' et X'', sinon X'' serait entre O et O', ce qui n'est pas. Donc, (X'X'') ne peut contenir O.

En raisonnant d'une façon analogue, on montre que si Y' et Y'' sont deux points de (Y), (Y'Y'') ne contient pas O, et que si X est un point de (X) et Y un point de (Y), (XY) contient O.

De là résulte le théorème.

Définitions. Soient O et A deux points distincts. Considérons la droite OA. Le point O divise tous les points de OA en deux classes jouissant de la propriété mentionnée dans le théorème II 2. L'ensemble des points de OA qui appartiennent à la même classe que A auquel on joint le point O s'appelle la *semi-droite* OA ; nous désignerons la semi-droite OA par la notation | OA[1]. Les points de | OA distincts de O et de A sont dits situés *du même côté* de O que A. La droite à laquelle appartiennent tous les points d'une semi-droite est le *support* de cette semi-droite.

Théorème II 3. *Étant donnés un plan et une droite a dans ce plan, il est possible, et d'une seule manière, de diviser tous les points du plan non situés sur a en deux classes jouissant de la propriété suivante : si* A *et* A' *sont deux points de la même classe,* (AA') *ne contient aucun point de a, et si* A *et* B *sont deux points de deux classes différentes,* (AB) *contient un point de a.*

(1) Cf. Coolidge, l. c. p. 28.

Démonstration. Il y a dans le plan au moins un point non situé sur *a* (postulat I 3); soit O un tel point. Appelons (I) l'ensemble des points du plan non sur *a* et distincts de O tels que si A est l'un quelconque de ces points, (OA) ne contienne aucun point de *a*; soit (II) l'ensemble des points du plan non sur *a* et distincts de O tels que si B est l'un quelconque de ces points, (OB) contienne un point de *a*. Tout point du plan distinct de O et non sur *a* appartient à l'une des classes (I) ou (II) et à une seulement. Chacune des classes (I) et (II) contient au moins un point Soit α l'ensemble des points de (I) auquel on joint O, et soit β l'ensemble des points de (II).

Si les classes dont il est question dans l'énoncé existent, elles coïncident avec α et β. Démontrons que α et β possèdent la propriété dont il est question dans l'énoncé.

Soient B et B′ deux points de β. Supposons d'abord B et B′ alignés sur O. *a* contient un point de (OB′); soit C ce point. *a* contient un point de (OB); ce point ne peut être autre que C; donc, C appartient à (OB). Donc, C n'est pas entre B et B′ (théorème II 2).

Supposons maintenant que B et B′ ne soient pas alignés sur O. Considérons les trois points O, B, B′. *a* ne passe ni par O, ni par B, ni par B′. *a* contient un point de (OB) et un point de (OB′). Donc, *a* ne contient aucun point de (BB′).

En raisonnant de la même façon, on montre que si A et A′ sont deux points de α, (AA′) ne contient aucun point de *a*, et que si A est un point de α et B un point de β, (AB) contient un point de *a*.

De là résulte le théorème.

Définitions Étant donnés un plan, une droite *a* dans le plan, et un point A du plan non situé sur *a*, les points du plan qui appartiennent à la même classe que A sont dits *du même côté* que A de *a*; on dit aussi que les deux classes sont les deux *demi-plans* en lesquels *a* divise le plan. Le plan auquel appartiennent tous les points d'un demi-plan est le *support* de ce dernier.

Théorème II 4. *Étant donnés un plan α, une droite a dans α, et une semi-droite k n'appartenant pas à a, issue*

d'un point O *de a, et située dans* α, *tous les points de k autres que* O *sont situés du même côté de a.*

DÉMONSTRATION. Ce théorème résulte immédiatement des théorèmes II 2 et II 3.

III. POSTULATS DE LA CONGRUENCE.

CONCEPT FONDAMENTAL. Nous imaginons une certaine relation entre deux segments que nous exprimons en disant que l'un des segments est *congruent* à l'autre. Lorsque le segment (AB) est congruent au segment (A′B′), nous écrirons (AB) ≡ (A′B′).

POSTULAT III 1. *Quand* A *et* B *sont deux points sur une droite a, et quand* A′ *est un point sur une droite a′, distincte de a ou identique avec a, on peut trouver sur a′ et d'un côté donné de* A′, *un point* B′ *et un seul tel que* (AB) *soit congruent à* (A′B′). *Tout segment est congruent à lui-même.*

POSTULAT III 2. *Si un segment* (AB) *est congruent à chacun des deux segments* (A′B′) *et* (A″B″), *alors* (A′B′) *est congruent à* (A″B″) *et* (A″B″) *est congruent à* (A′B′).

POSTULAT III 3. *Soient* (AB) *et* (BC) *deux segments sans point commun autre que* B *situés sur la droite a, et ensuite* (A′B′) *et* (B′C′) *deux segments situés sur la même droite ou sur une autre droite a′ et sans point commun autre que* B′; *si l'on a*

$$(AB) \equiv (A'B'), \quad (BC) \equiv (B'C'),$$

on a toujours

$$(AC) \equiv (A'C').$$

THÉORÈME III 1. *Si le segment* (AB) *est congruent au segment* (A′B′), *le segment* (A′B′) *est congruent au segment* (AB).

DÉMONSTRATION. On a

$$(AB) \equiv (A'B')$$

par hypothèse. On a aussi

$$(AB) \equiv (AB)$$

d'après le postulat III 1. On a donc

$$(A'B') \equiv (AB)$$

d'après le postulat III 2. C. q. f. d

Remarque. Si $(AB) \equiv (A'B')$, on peut dire que (AB) et $(A'B')$ sont congruents entre eux, sans spécifier quel est le sens de cette relation.

Définition. Soient h et k deux semi-droites issues d'un même point O, et appartenant à des droites différentes. On appelle *angle* le système des semi-droites h et k. Nous désignerons cet angle par la notation (h, k). D'après cette définition, les angles (h, k) et (k, h) sont parfaitement identiques et l'on peut écrire indifféremment (h, k) ou (k, h).

Concept fondamental. Nous imaginons une certaine relation entre deux angles que nous exprimons en disant que l'un des deux angles est *congruent* à l'autre. Lorsque (h, k) est congruent à l'angle (h', k'), nous écrirons $(h, k) \equiv (h', k')$.

Postulat III 4. *Supposons donnés un angle* (h, k), *un point* O', *une semi-droite* h' *issue de* O', *et un demi-plan* α' *limité au support de* h'. *Il existe une semi-droite* k' *et une seule, issue de* O', *située dans* α', *et telle que l'angle* (h, k) *soit congruent à l'angle* (h', k'). *Tout angle est congruent à lui-même.*

Postulat III 5. *Si un angle* (h, k) *est congruent à chacun des angles* (h', k') *et* (h'', k''), *alors* (h', k') *est congruent à* (h'', k'') *et* (h'', k'') *est congruent à* (h', k').

Théorème III 2. *Si l'angle* (h, k) *est congruent à l'angle* (h', k'), *l'angle* (h', k') *est congruent à l'angle* (h, k).

Démonstration. Ce théorème se démontre comme le théorème III 1.

Remarque. Si un angle est congruent à un autre, on peut dire d'après le théorème précédent que les deux angles sont congruents entre eux, sans spécifier le sens de la relation de congruence.

Définitions. On appelle *triangle* la figure formée par les trois segments déterminés par trois points non en ligne droite. Étant donnés trois points A, B, C non situés en ligne droite, on appelle angle ABC et on désigne par $\sphericalangle$ ABC l'angle (| BA, | BC).

Postulat III 6. *Quand on a dans deux triangles* ABC *et* A'B'C' *les congruences*

$$(AB) \equiv (A'B'), \quad (AC) \equiv (A'C'), \quad \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C',$$

alors on a toujours les congruences

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C', \quad \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'.$$

Remarque. Le postulat III 6 n'affirme pas la congruence complète des deux triangles; cette dernière peut se démontrer.

Au moyen des postulats énoncés jusqu'ici, on peut établir le théorème sur la congruence des angles adjacents à la base dans un triangle isoscèle, de même que les différents cas de congruence des triangles. On peut aussi définir l'angle droit et démontrer que tous les angles droits sont congruents entre eux.

IV. Postulat des parallèles ou postulat d'Euclide. *Soient* a *une droite et* A *un point non situé sur* a. *Alors il y a dans le plan déterminé par* A *et* a *(voir théorème* I 1*) au plus une droite passant par* A *et qui n'a avec* a *aucun point commun.*

Remarque. Le postulat IV n'affirme pas qu'il existe une droite passant par A et qui n'a avec a aucun point commun.

V. Postulat de la continuité ou postulat de Dedekind. *Quand les points d'un segment* (AB) *sont divisés par un procédé quelconque en deux classes, de telle façon que*

a) *tout point de* (AB) *appartient à l'une des deux classes, et à une seulement;*

b) *l'extrémité* A *appartient à la première classe, et l'extrémité* B *à la seconde; chacune des classes contient plus d'un point;*

c) *si* A' *est un point de la première classe distinct de* A *et* B' *un point de la seconde,* A' *est entre* A *et* B'*;*

alors il existe sur le segment (AB) *un point* C *tel que tout point entre* A *et* C *appartienne à la première classe, et que tout point entre* C *et* B *appartienne à la seconde classe. Le point* C *peut appartenir suivant le cas à l'une ou à l'autre classe.*

Remarque. Grâce au postulat de la continuité on peut établir au moyen d'une unité de longueur une correspondance biunivoque et réciproque entre les points d'une semi-droite et les nombres positifs, zéro compris; par *correspondance biunivoque et réciproque* on entend une correspondance telle qu'à chaque point de la semi-droite réponde un nombre positif et un seul, et, réciproquement, à chaque nombre positif un point de la semi-droite et un seul. Au lieu de correspondance biunivoque et réciproque, on dit aussi *correspondance parfaite;* cette dernière expression sera employée parfois dans la suite.

4. Tel est le système des concepts fondamentaux et des postulats de la géométrie euclidienne. Nous allons maintenant examiner si ce système de postulats est exempt de contradictions. Nous avons dit au § 2 que les postulats de la géométrie euclidienne possèdent une évidence intuitive pour notre esprit. Autrefois, on considérait à priori cette évidence comme infaillible; on croyait en conséquence la vérité des postulats certaine, et il aurait semblé tout à fait superflu d'examiner si les postulats sont compatibles. Mais, d'après ce qui a été dit au § 2, nous faisons tout à fait abstraction de l'évidence intuitive. Il est donc nécessaire d'étudier la compatibilité des postulats. Nous allons démontrer la proposition que voici.

Théorème. *Les postulats de la géométrie euclidienne sont compatibles.*

Démonstration. Soient x, y, z trois variables pouvant prendre des valeurs réelles quelconqnes.

Appelons *point analytique* un système de valeurs quelconques attribuées à ces trois variables.

Appelons *plan analytique* l'ensemble des systèmes de valeurs de x, y, z qui satisfont à une équation de la forme

$$ax + by + cz + d = 0,$$

où l'on n'a pas $a = b = c = 0$. Étant donnée une autre équation équivalente à la précédente, il y correspondra, d'après cette définition, le même plan analytique.

Appelons *droite analytique* l'ensemble des points analy-

tiques qui satisfont à un système de deux équations de la forme

$$ax + by + cz + d = 0,$$
$$a'x + b'y + c'z + d' = 0,$$

où l'on a

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{matrix} \right\| \neq 0\,(1).$$

Étant donnés trois points analytiques distincts situés en ligne droite (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), nous dirons que le deuxième point est *situé entre* les deux autres si x_2 est compris entre x_1 et x_3, y_2 entre y_1 et y_3, et z_2 entre z_1 et z_3.

Cela étant, nous définissons le *segment* et la *semi-droite analytique* comme nous l'avons fait pour les segments et semi-droites géométriques.

Étant donnés deux segments analytiques $(x_1, y_1, z_1) - (x'_1, y'_1, z'_1)$ et $(x_2, y_2, z_2) - (x'_2, y'_2, z'_2)$, nous dirons que ces deux segments sont *congruents* lorsqu'on a

$$(x_1 - x'_1)^2 + (y_1 - y'_1)^2 + (z_1 - z'_1)^2$$
$$= (x_2 - x'_2)^2 + (y_2 - y'_2)^2 + (z_2 - z'_2)^2.$$

Nous définissons l'*angle analytique* de la même façon que l'angle géométrique.

Supposons données deux semi-droites analytiques distinctes a et b issues d'un même point analytique (o_1, o_2, o_3), et deux semi-droites analytiques distinctes a' et b' issues d'un même point analytique (o'_1, o'_2, o'_3). Soient (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) deux points analytiques appartenant respectivement à a et à b et distincts de (o_1, o_2, o_3); soient (a'_1, a'_2, a'_3) et (b'_1, b'_2, b'_3) deux points analytiques appartenant respectivement à a' et à b' et distincts de (o'_1, o'_2, o_3').

---

(1) Cette inégalité signifie que l'un au moins des trois déterminants obtenus en combinant deux à deux les trois colonnes du tableau figurant au premier membre est différent de zéro. Un tableau tel que celui qui figure au premier membre s'appelle en algèbre une *matrice* de déterminants.

Posons

$$\alpha = \frac{(a_1 - o_1)(b_1 - o_1) + (a_2 - o_2)(b_2 - o_2) + (a_3 - o_3)(b_3 - o_3)}{+\sqrt{(a_1 - o_1)^2 + (a_2 - o_2)^2 + (a_3 - o_3)^2}\sqrt{(b_1 - o_1)^2 + (b_2 - o_2)^2 + (b_3 - o_3)^2}},$$

$$\alpha' = \frac{(a'_1 - o'_1)(b'_1 - o'_1) + (a'_2 - o'_2)(b'_2 - o'_2) + (a'_3 - o'_3)(b'_3 - o'_3)}{+\sqrt{(a'_1 - o'_1)^2 + (a'_2 - o'_2)^2 + (a'_3 - o'_3)^2}\sqrt{(b'_1 - o'_1)^2 + (b'_2 - o'_2)^2 + (b'_3 - o'_3)^2}}.$$

En s'inspirant de la géométrie analytique, on montre sans difficulté que α et α' ne dépendent respectivement que de a, b et de a', b', et non du choix de (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (a'_1, a'_2, a'_3), (b'_1, b'_2, b'_3) sur a, b, a', b' respectivement. Lorsque les nombres α et α' sont égaux, nous dirons par définition que l'angle analytique formé par les semi-droites analytiques a et b est *congruent* à l'angle analytique formé par les semi-droites analytiques a' et b'.

Nous avons donc fait correspondre à chacun des concepts fondamentaux de la géométrie une classe d'objets existant dans le domaine des nombres. Remplaçons maintenant partout dans les énoncés des postulats de la géométrie euclidienne les mots qui expriment les concepts fondamentaux par les mots qui indiquent les objets analytiques correspondants. Nous remplacerons donc partout le mot « point » par les mots « point analytique », le mot « plan » par les mots « plan analytique », et ainsi de suite. Nous obtiendrons ainsi une série de propositions qui attribuent certaines propriétés aux nombres. On peut démontrer que ces propositions sont vraies. Il est inutile que nous donnions ici cette démonstration ; le lecteur peut la faire lui-même avec la plus grande facilité pour le motif suivant.

Au moyen de trois axes coordonnés rectangulaires, on peut établir dans la géométrie analytique, supposée connue du lecteur, une correspondance entre tous les points d'une part et tous les systèmes de valeurs de trois variables réelles d'autre part. Cette correspondance établie, il en résulte une correspondance entre les concepts fondamentaux de la géométrie d'une part et certaines classes d'objets analytiques d'autre part. Ces dernières classes d'objets analytiques sont donc familières au

lecteur. Or, ces classes d'objets analytiques sont absolument identiques à celles que nous avons fait correspondre aux concepts fondamentaux de la géométrie dans ce qui précède. En remarquant cette identité et en s'inspirant de ce qu'il sait des propriétés des classes d'objets analytiques en question, le lecteur pourra aisément prouver que les théorèmes d'analyse qui répondent aux postulats sont vrais.

Supposons maintenant le théorème à démontrer faux. Les postulats de la géométrie euclidienne sont alors incompatibles. En d'autres mots, il existe une proposition P_g, découlant logiquement des postulats, et constituant la négation de l'un de ces postulats. Remplaçons dans la proposition P_g les mots exprimant les concepts fondamentaux par les mots indiquant les classes d'objets analytiques correspondantes. Nous obtenons ainsi une certaine proposition P_a qui attribue certaines propriétés aux nombres.

Or, le fait qu'une proposition géométrique est la négation d'une autre, ou la conséquence logique d'un système d'autres propositions géométriques, est indépendant du contenu des concepts fondamentaux, et dépend uniquement de la forme de ces propositions relativement aux concepts fondamentaux.

Donc, la proposition P_a sera une conséquence logique des théorèmes d'analyse qui répondent aux postulats, et cette proposition constituera la négation d'un de ces théorèmes. Or, ces théorèmes sont vrais. Donc, nous arrivons à une absurdité. Donc, les postulats de la géométrie euclidienne sont compatibles. C. q. f. d.

REMARQUES. Dans cette démonstration, nous nous sommes basés sur l'hypothèse que dans le domaine des nombres on ne peut jamais se heurter à des contradictions. Nous ne discuterons pas ici la question de savoir dans quelle mesure cette hypothèse est susceptible de démonstration, et comment on pourrait la démontrer. Les avis sont d'ailleurs partagés sur cette question.

Dans la démonstration qui vient d'être exposée, nous

avons suivis la méthode que voici : pour montrer que certaines propositions traitant d'objets en partie indéterminés ou mal connus sont compatibles, nous y avons fait correspondre d'autres propositions se rapportant à un domaine mieux connu, où nous savons qu'il n'y a pas de contradictions à craindre. Nous aurons plusieurs fois dans la suite l'occasion de nous servir de ce mode de démonstration.

Observons que nous ne savons nullement encore si certains des postulats du § 3 ne pourraient se démontrer au moyen des autres. Cette question doit être examinée pour chaque postulat en particulier. Dans la suite nous ne ferons pas cet examen d'une manière complète. Nous nous bornerons à étudier la question pour certains postulats particulièrement intéressants en vue du but que nous poursuivons. D'ailleurs, si un postulat découle logiquement d'autres postulats et est par là en quelque sorte superflu, cela peut être une inélégance, mais ne constitue pas un défaut fondamental du système de postulats considéré.

5. Le système de postulats exposé au § 3 suffit à bâtir tout l'édifice de la géométrie euclidienne. Dans cette géométrie, nous ne pourrons jamais nous heurter à une contradiction, quelque loin que nous poussions les déductions (§ 4).

Observons que la géométrie édifiée sur le système de fondements du § 3 est la géométrie euclidienne à trois dimensions Pour obtenir la géométrie à n dimensions, il faudrait modifier ce système. Dans ce livre nous n'irons pas, en général, au delà de trois dimensions, dans l'étude de la géométrie.

Pour voir comment on édifie la géométrie élémentaire au moyen des postulats du § 3, on peut consulter G. B. Halsted : « Rational geometry. A text-book for the science of space based on Hilberts foundations », New York 1904 ; traduction française par P. Barbarin, Paris 1911.

Pour la discussion des différents systèmes de concepts

fondamentaux et de postulats qui ont été proposés et pour l'étude de la portée des différents postulats, nous renvoyons à l'ouvrage suivant: « Questioni riguardanti la geometria elementare », publié sous la direction de F. Enriques, Bologna 1900; traduction allemande (Fragen der Elementargeometrie) par H. Thieme et H. Fleischer, Teil 1-2, Leipzig & Berlin 1907-1911.

CHAPITRE II.

Indications historiques et bibliographiques. Postulats de la géométrie générale.

6 Nous avons dit au § 2 qu'étant donnés les concepts fondamentaux de la géométrie, les postulats sont arbitraires, pourvu qu'ils soient compatibles. On peut poser la question suivante : étant donné le système de concepts fondamentaux du § 3, existe-t-il d'autres systèmes de postulats compatibles entre eux que celui du § 3? Par « d'autres » systèmes de postulats il faut entendre des systèmes qui impliqueraient la négation de certains postulats du § 3, ou laisseraient indéterminée la vérité de certains de ces postulats. La question posée revient à se demander s'il y a d'autres géométries possibles que la géométrie euclidienne. Au point de vue du § 2, la réponse à cette question est évidemment affirmative. — Voici un exemple.

Théorème. *Le système de postulats constitué par les postulats de la géométrie euclidienne autres que le postulat de la continuité auxquels on joint la négation du postulat de la continuité est exempt de contradictions.*

Démonstration. Plaçons nous dans l'espace de la géométrie euclidienne ; prenons un système de trois axes coordonnés rectangulaires. Appelons *point algébrique* tout point dont les trois coordonnées cartésiennes par rapport à nos axes coordonnés sont des nombres algébriques ; appelons *droite algébrique* ou *plan algébrique* l'ensemble des points algébriques d'une droite ou d'un plan qui contient au moins deux points algébriques distincts ou trois points algébriques non en ligne droite. Appelons *segment algébrique* l'ensemble des points algé-

briques d'un segment dont les deux extrémités sont des points algébriques, et *semi-droite algébrique* l'ensemble des points algébriques d'une semi-droite dont l'origine et un autre point sont algébriques. Appelons *angle algébrique* tout système de deux semi-droites algébriques ayant même origine et des supports distincts. Nous dirons que deux segments algébriques ou deux angles algébriques sont *congruents* entre eux lorsque les segments ou angles ordinaires qui leur correspondent sont congruents entre eux.

Les concepts fondamentaux de la géométrie sont les suivants : point, droite, plan, relation de « situé entre » entre un point et un couple de points, relation de congruence entre deux segments, relation de congruence entre deux angles. Faisons correspondre à ces concepts le système de classes d'objets suivant : point algébrique, droite algébrique, plan algébrique, relation de « situé entre » entre un point algébrique et un couple de points algébriques, relation de congruence entre deux segments algébriques, relation de congruence entre deux angles algébriques Ces classes d'objets existent dans l'espace euclidien. Comme nous le verrons tantôt, on peut démontrer qu'elles satisfont à tous les postulats du § 3, sauf le postulat de la continuité, et à la négation du postulat de la continuité (c. à. d. que le postulat de la continuité est faux pour le système de classes d'objets considéré). De là on peut immédiatement conclure que les postulats du § 3 autres que le postulat de la continuité et la négation de ce dernier postulat sont compatibles ; sinon, en effet, on serait conduit à une contradiction dans l'espace euclidien, ce qui est impossible (§ 4). On peut aussi exprimer le fait qui vient d'être établi en disant qu'il est impossible de démontrer le postulat de la continuité au moyen des autres postulats euclidiens.

Nous nous sommes basés dans ce raisonnement sur l'affirmation suivante : le système de classes d'objets existant dans l'espace euclidien que nous avons fait correspondre aux concepts fondamentaux de la géométrie satisfait aux postulats euclidiens autres que le postulat

de la continuité et à la négation de ce dernier. C'est là un simple théorème de la géométrie euclidienne. Sa démonstration, dans laquelle nous pouvons nous servir de toutes les connaissances de la géométrie euclidienne dont nous disposons, n'offre pas la moindre difficulté ; il suffira ici de démontrer comme exemple le postulat II 4.

Soient A, B, C trois points non en ligne droite ; soit *a* une droite du plan ABC qui ne passe ni par A, ni par B, ni par C, et qui passe par un point F de (AB). Supposons que les trois coordonnées cartésiennes de chacun des points A, B, C soient algébriques, et que *a* contienne deux points distincts A_1 et A_2 à coordonnées algébriques. Nous savons que *a* passe par un point de (BC) ou de (AC). Supposons que *a* passe par un point de (BC) ; soit D ce point. Il s'agit de montrer que les coordonnées de D sont algébriques.

Les équations de *a* et de CB constituent un système de 4 équations linéaires à 3 inconnues. Il y a un système de valeurs et un seul des inconnues qui satisfait à ces quatres équations (à savoir les coordonnées de D). Les quatre équations peuvent être remplacées par un système de trois équations linéaires à trois inconnues admettant une solution unique, qui est constituée par les coordonnées de D. On voit aisément qu'on peut trouver d'abord les coefficients de ces trois équations et ensuite les coordonnées de D en effectuant sur les coordonnées de A_1, A_2, C et B, qui sont des nombres algébriques, un nombre fini de fois les opérations addition, soustraction, multiplication et division. On en déduit aisément que les coordonnées de D sont algébriques en se basant sur le théorème connu d'après lequel toute racine d'une équation algébrique à coefficients algébriques est un nombre algébrique.

Montrons pour finir que le postulat de la continuité est faux. Soit A' le point de coordonnées (3, 0, 0,), B' celui de coordonnées (π, 0, 0) et C' celui de coordonnées (4, 0, 0). A' et C' sont des points algébriques ; divisons les points algébriques de (A'C') en deux classes, la première com-

prenant les points algébriques de (A′B′), la seconde les points algébriques de (B′C′) distincts de B′. Les deux classes ainsi constituées satisfont à toutes les conditions du postulat de la continuité. Or, π est un nombre transcendant; B′ n'est donc pas un point algébrique, et le postulat de la continuité est faux pour notre système de classes d'objets.

7. Parmi les géométries autres que la géométrie euclidienne, il y en a deux particulièrement importantes, tant par le rôle capital qu'elles ont joué dans l'évolution de la science, que par les analogies et différences remarquables qu'elles présentent avec la géométrie euclidienne. Ce sont ces deux géométries que nous nous proposons d'étudier dans la suite. L'une de ces géométries s'appelle *géométrie de Lobatchevskij* ou *géométrie hyperbolique* et l'autre *géométrie de Riemann* ou *géométrie elliptique*(1). On réserve généralement le nom de *géométrie non-euclidienne* aux géométries hyperbolique et elliptique; nous en ferons de même dans le présent travail.

8. Avant de commencer l'étude de la géométrie non-euclidienne, nous voulons dire quelques mots sur l'origine de cette science. — Autrefois, les géomètres attachaient une grande importance à l'évidence intuitive des postulats. Ils regardaient cette évidence comme infaillible, et jamais il ne leur vint à l'esprit de se demander si l'on peut construire des géométries autres que la géométrie euclidienne.

Mais, le postulat des parallèles semblait à ces mathématiciens d'autrefois moins évident que les autres, et ainsi ils furent amenés à en chercher des démonstrations, pour bannir les dernières traces de doute qui pourraient encore subsister concernant la certitude absolue de la géométrie. On trouve des essais de démonstration du postulat des parallèles dans l'antiquité, au moyen-âge, chez les Arabes, pendant la Renaissance, aux 17e et 18e siècles. Souvent on

(1) Pour les termes « géométrie parabolique » (cf. § 2), « géom. hyperbolique » et « géom. elliptique », voir F. Klein, Mathematische Annalen, Bd. 4 (1871), p. 577.

chercha à parvenir au but en supposant le postulat faux, en faisant de la géométrie dans cette hypothèse, et en cherchant à dévoiler des contradictions. C'est surtout au 18e siècle que les essais de démonstration acquirent une importance particulière ; pendant cette période plusieurs géomètres, en suivant la méthode de démonstration par l'absurde, poussèrent assez loin l'étude des figures dans l'hypothèse de la fausseté du postulat des parallèles, et découvrirent différentes propriétés importantes qui résultent de cette fausseté. Parmi les recherches les plus importantes effectuées dans cette direction, on peut citer celles de l'italien Gerolamo Saccheri (1667-1733), du suisse Johann Heinrich Lambert (1728-1777) et du français Adrien Marie Legendre (1752-1833).

Mais, tous ces essais furent infructueux, et les démonstrations que certains avaient cru trouver impliquaient toujours l'admission plus ou moins implicite d'une proposition non démontrée.

Enfin, dans le courant de la première moitié du 19e siècle, par l'étude de plus en plus approfondie des propriétés des figures dans l'hypothèse de la fausseté du postulat des parallèles, plusieurs géomètres furent amenés à l'idée que ces propriétés sont exemptes de contradictions quelque loin que l'on pousse les déductions, et ces géomètres découvrirent indépendamment les uns des autres une nouvelle géométrie où le postulat des parallèles est faux. Cette géométrie est la géométrie hyperbolique.

Dans la géométrie hyperbolique, tous les postulats du § 3 sont vrais, sauf le postulat IV, qui est supposé faux, ce qui entraîne la proposition suivante : étant donnés une droite a et un point A non situé sur a, il existe deux droites distinctes P'_1AP_1 et P'_2AP_2, passant par A, situées dans le plan de A et de a, ne coupant pas a, et telles que toute droite passant par A dans le plan de la figure coupe a si elle est située dans les angles opposés par le sommet $\sphericalangle P'_1AP_2$ et $\sphericalangle P_1AP'_2$, mais ne coupe pas a si elle est située dans les angles opposés $\sphericalangle P_1AP_2$ et $\sphericalangle P'_1AP'_2$.

Parmi les fondateurs de la géométrie hyperbolique, les principaux sont Gauss (1777-1855), le géomètre russe Lobatchevskij (1793-1856) et le géomètre hongrois Jean Bolyai (1802-1860). Gauss semble avoir été le premier qui eut une idée claire de la géométrie hyperbolique; on sait qu'il y arriva avant 1816. Il ne publia rien de ses recherches, que l'on connaît seulement par sa correspondance. Lobatchevskij et Bolyai publièrent leurs premiers travaux sur la géométrie hyperbolique respectivement en 1829 et en 1832.

Les fondateurs de la géométrie hyperbolique n'envisageaient pas la possibilité d'autres géométries différant de la géométrie euclidienne. Mais plus tard, en 1854, Riemann (1825-1866) indiqua les fondements d'une deuxième géométrie différente de la géométrie euclidienne, la géométrie elliptique.

Les postulats de la géométrie euclidienne autres que le postulat des parallèles permettent d'affirmer que la droite est infinie; d'après le postulat III 1 par exemple, on peut faire parcourir à deux points, partant d'un même point d'une droite, et se déplaçant suivant cette droite dans les deux sens opposés, une distance arbitrairement grande sans qu'ils se rencontrent jamais. En outre, comme nous le verrons plus tard (§§ 211), les postulats euclidiens autres que le postulat des parallèles permettent d'affirmer qu'on peut toujours mener une parallèle au moins à une droite donnée par un point extérieur donné. Dans la géométrie de Riemann maintenant, deux droites coplanaires ont toujours au moins un point commun, c. à d. qu'il n'existe pas de parallèles. D'après ce que nous venons de dire, on ne peut pas nier l'existence des parallèles sans modifier les postulats des groupes I, II, III et V ; la modification subie par ces postulats dans la géométrie de Riemann peut se résumer en disant que la droite y est une ligne fermée revenant sur elle-même.

Enfin, depuis Riemann jusqu'à nos jours, on s'est graduellement approché du point de vue suivant lequel on

peut édifier autant de géométries différentes qu'il y a de systèmes de postulats exempts de contradictions. Actuellement on a étudié à côté des géométries hyperbolique et elliptique plusieurs autres géométries différentes de la géométrie euclidienne. Toutefois la géométrie hyperbolique et la géométrie elliptique sont les deux géométries indépendantes du postulat des parallèles et de l'infinité de la droite qui ressemblent le plus à la géométrie euclidienne. Dans la suite, nous nous occuperons exclusivement de la géométrie non-euclidienne proprement dite.

Nous nous bornerons pour ce qui regarde l'histoire de la géométrie non-euclidienne à ces indications sommaires. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur au livre de Bonola déjà cité.

8bis. Parmi les nombreux ouvrages consacrés à la géométrie non-euclidienne dont il peut être utile de se servir pour aborder l'étude du sujet, nous voulons encore, outre ceux dont il a été question précédemment, indiquer les suivants.

D. M. Y. Sommerville : « Bibliography of non-euclidean geometry », London 1911. Cet ouvrage capital contient la bibliographie complète de tout ce qui a été publié sur le postulat des parallèles et sur la géométrie non-euclidienne dans toutes les langues, depuis l'antiquité jusqu'à nos jours.

P. Mansion : « Premiers principes de la métagéométrie ou géométrie générale », Paris 1896 (46 pages). Voir aussi l'article de Mansion cité plus loin, au § 361.

P. Barbarin : « La géométrie non-euclidienne », 2e éd., Paris 1907 (« Scientia » No 15, 91 pages).

H. Liebmann : « Nichteuklidische Geometrie », 2e éd., Berlin u. Leipzig 1912 (Sammlung Schubert 49, 222 pages).

D. M. Y. Sommerville : « The elements of non-euclidean geometry », London 1914 (274 pages).

H. S. Carslaw : « The elements of non-euclidean plane geometry and trigonometry », London 1916 (179 pages).

9. Nous allons maintenant aborder l'étude de la géo-

métrie hyperbolique et de la géométrie elliptique en supposant que nous ne sachions rien de ce qui a été dit au § 8.

Nous nous proposons d'édifier une géométrie différente de la géométrie euclidienne. Nous pouvons choisir les postulats devant servir à l'édification d'une nouvelle géométrie d'après notre bon plaisir, pourvu qu'ils soient compatibles. Nous ne voulons pas ici passer en revue différents choix que l'on pourrait faire. Nous nous bornons à faire un choix déterminé Le système de postulats résultant de notre choix se trouve exposé au § 10, ensemble avec les concepts fondamentaux (qui sont les mêmes que dans la géométrie euclidienne).

10. Pour exposer le système de postulats résultant de notre choix, ensemble avec les concepts fondamentaux, il suffit de transcrire mot par mot le paragraphe 3 depuis la ligne contenant les mots « I. Postulats de l'appartenance » comprise jusqu'à la fin, sauf les modifications suivantes :

1°) L'énoncé du postulat III 1 est remplacé par l'énoncé suivant.

Etant donnés d'une part deux points distincts A *et* B *et d'autre part deux points distincts* A′ *et* C′, *une et une seule des trois éventualités suivantes se présente : a)* (AB) *est congruent à* (A′ C′); *b) il existe un point* C *entre* A *et* B *tel que* (AC) *soit congruent à* (A′C′) ; *c) il existe un point* B′ *entre* A′ *et* C′ *tel que* (AB) *soit congruent à* (A′B′). *Dans le cas b) ou c) le point* C *ou* B′ *est unique. Tout segment est congruent à lui-même.*

2°) La remarque qui suit le postulat III 6 est supprimée.

3°) Le postulat IV est supprimé, de même que la remarque qui le suit.

4°) Sur la ligne qui précède immédiatement l'énoncé du postulat de Dedekind et qui contient les mots « V. Postulat de la continuité ou postulat de Dedekind » le chiffre V est remplacé par le chiffre IV.

5°) La remarque qui suit le postulat V est supprimée.

Nous supposerons dans la suite la partie du para-

graphe 3 que nous avons indiquée transcrite ici, avec les modifications que nous venons d'énumérer.

11. On constate aisément que les postulats du § 10 sont tous vrais dans la géométrie euclidienne. Par conséquent les postulats du § 10 sont compatibles. La géométrie basée sur ces postulats s'appelle ***géométrie métrique générale dans une région limitée;*** ici nous l'appellerons géométrie générale tout court. C'est cette géométrie que nous nous proposons d'étudier dans la suite.

Tout théorème de la géométrie générale est vrai dans la géométrie euclidienne. La géométrie générale embrasse donc la géométrie euclidienne. Nous verrons plus loin qu'elle embrasse dans un certain sens encore deux autres géométries, qui sont précisément les géométries de Lobatchevskij et de Riemann. Elle est donc réellement plus générale que la géométrie euclidienne.

12. Dans la géométrie euclidienne, on peut prolonger tout segment d'une longueur arbitrairement grande (§ 3, postulat III 1). Dans la géométrie générale, on peut aussi prolonger tout segment, mais la longueur de laquelle on peut prolonger un segment est laissée complètement indéterminée.

Pour ce qui concerne le prolongement des segments, l'espace entier de la géométrie générale ressemble donc à une région de l'espace euclidien limitée par une surface fermée convexe, les points de la surface limite étant considérés comme n'appartenant pas à la région.

Si l'on ajoute aux postulats de la géométrie générale le postulat III 1 de la géométrie euclidienne, on obtient un système de postulats parfaitement équivalent aux postulats euclidiens autres que le postulat des parallèles. L'exactitude de cette assertion se constate immédiatement.

Maintenant nous allons commencer l'étude de la géométrie générale.

CHAPITRE III.

Théorèmes élémentaires fondamentaux de la géométrie générale (1).

13. Théorème. *Etant données deux droites distinctes situées dans un même plan, ou bien elles ont un seul point commun, ou bien elles n'ont aucun point commun; étant donnés deux plans distincts, ou bien ils n'ont aucun point commun, ou bien ils ont une droite commune; étant donnés un plan et une droite non située dans ce plan, ou bien il y a un seul point commun au plan et à la droite, ou bien il n'y a aucun point commun aux deux.*

Ce théorème se démontre très facilement au moyen des postulats de l'appartenance.

14. Théorème. *Etant données deux droites distinctes qui ont un point commun, il y a un plan et un seul qui passe par les deux droites.*

Ce théorème se démontre très facilement au moyen des postulats de l'appartenance.

15. Théorème. *Entre deux points distincts d'une droite, il y a toujours une infinité de points.*

Démonstration. Soient A et B deux points distincts d'une droite. Il y a un point C entre A et B (§ 10, postulat II 2). Il y a un point D entre A et C (§ 10, postulat II 2). Le point D est entre A et B (§ 10, théorème II 1). On peut continuer ainsi indéfiniment. De là résulte le théorème.

16. Théorème. *Si* A *et* C *sont deux points distincts, si* B *est situé entre* A *et* C, *et si* D *est aussi situé entre* A

(1) Nous avons suivi Hilbert (l. c.) dans ce chapitre pour un certain nombre de théorèmes.

et C, *alors* D *est situé ou bien entre* A *et* B, *ou bien entre* B *et* C. (D *est supposé distinct de* B).

Démonstration. Comparons les trois points A, B et D. Si A est entre B et D, A est entre D et C (§ 10, théorème II 1), ce qui n'est pas. Donc, A n'est pas entre B et D. Si D est entre A et B, le théorème est établi. Si D n'est pas entre A et B, B est entre A et D (§ 10, postulat II 3) et D est entre B et C (§ 10, théorème II 1).

17. Théorème. *Etant donnés quatre points distincts d'une droite, on peut toujours les désigner par les lettres* A, B, C, D, *de telle façon que* B *soit entre* A *et* C *et aussi entre* A *et* D, *et que* C *soit entre* A *et* D *et aussi entre* B *et* D.

Démonstration. On peut démontrer ce théorème sans la moindre difficulté, en se basant sur le § 16.

18. Théorème. *Etant donné un nombre fini n de points distincts en ligne droite, il est toujours possible de les désigner par* A_1, A_2, ..., A_n, *de telle façon que* A_2 *soit entre* A_1 *d'une part et* A_3, .., A_n *d'autre part, que* A_3 *soit entre* A_1, A_2 *d'une part et* A_4, ..., A_n *d'autre part, et ainsi de suite. A côté de cette façon de désigner les n points donnés par* A_1, ..., A_n, *il n'y a qu'une seule autre façon qui jouisse de la même propriété, notamment celle qui consiste à désigner* A_1 *par* A_n, A_2 *par* A_{n-1}, ..., A_n *par* A_1.

Démonstration. On peut démontrer sans difficulté ce théorème par passage de n à $n+1$, en se basant sur le § 17.

19. Théorème. *Si une droite a contient un point du prolongement d'un côté d'un triangle au delà d'une de ses extrémités, et si a contient un point d'un deuxième côté du triangle distinct des extrémités de ce côté, alors a contient aussi un point du troisième côté du triangle distinct des extrémités de ce côté.*

Démonstration. On voit d'abord que a ne passe par aucun des trois sommets du triangle, car, s'il en était autrement, les trois sommets du triangle seraient en ligne droite.

Soit (BC) le côté du triangle dont *a* coupe le prolongement ; *a* ne peut passer par aucun point situé entre B et C. Donc, *a* coupe un point du troisième côté du triangle (§ 10, postulat II 4). C. q. f. d.

20. THÉORÈME. *Supposons donnés un triangle* ABC *et trois points* A′, B′, C′, *situés respectivement entre* B *et* C, *entre* A *et* C *et entre* A *et* B. *Il est impossible que les trois points* A′, B′ *et* C′ *soient en ligne droite.*

DÉMONSTRATION. La démonstration de ce théorème n'offre aucune difficulté (1).

21. THÉORÈME. *Si une droite située dans le plan d'un triangle coupe le périmètre de ce triangle en un point distinct des sommets, elle coupe le périmètre encore en un seul autre point*

DÉMONSTRATION. Soient ABC un triangle et *a* une droite du plan ABC coupant le périmètre de ABC en D, distinct de A, de B et de C. Par définition D est sur (AB), sur (BC) ou sur (CA) ; supposons D sur (AB). Si *a* passe par C, *a* coupe par là même le périmètre en un deuxième point. Si *a* ne passe pas par C, *a* ne passe par aucun des trois sommets (car D est distinct de A et de B). Donc, *a* contient un point d'un deuxième côté (§ 10, postulat II 4). Enfin on voit facilement que le deuxième point d'intersection de *a* avec le périmètre est unique.

22. DÉFINITION. Étant donné un triangle, tout point intérieur à un segment déterminé par un point d'un côté du triangle distinct des extrémités de ce côté et par le sommet opposé à ce côté est dit *intérieur* au triangle. Tout point du plan du triangle non intérieur au triangle et non situé sur son périmètre est dit *extérieur* au triangle.

23. THÉORÈME. *Si une droite située dans le plan d'un triangle passe par un point intérieur au triangle, elle*

---

(1) Dans la suite, il arrivera de temps en temps que nous énoncerons un théorème sans le faire suivre d'aucune démonstration ; chaque fois que cela se présente, ce sera en raison de ce que la démonstration est si simple que le lecteur peut la trouver immédiatement lui-même.

coupe le périmètre du triangle en deux points distincts et en deux seulement.

Démonstration. Supposons donnés un triangle ABC, un point P intérieur au triangle, et une droite a située dans le plan ABC et passant par P. Supposons que P se trouve sur (CC′), C′ étant sur AB entre A et B.

Si a passe par C, le théorème est démontré.

Si a passe par A, a passe par un point de (CB) (on applique le § 19 au triangle CC′B et à a), et le théorème est établi.

De même, si a passe par B le théorème est établi.

Le dernier cas qui puisse se présenter est celui où a ne passe ni par C, ni par C′, ni par A, ni par B. En appliquant le § 10, postulat II 4, à a et à CAC′, on voit que a contient un point entre A et C, ou un point entre A et C′. Cela étant, le théorème à démontrer se déduit du § 21.

24. Théorème *Si un point* P *est intérieur à un triangle* ABC, *la droite joignant* P *et un sommet quelconque* C *du triangle coupe le côté opposé* (AB) *en un point* C′ *distinct de* A *et de* B, *et* P *est entre* C *et* C′.

Démonstration. Ce théorème se démontre aisément au moyen du § 19.

25. Théorème. *Etant donné un plan* α, *il est possible, et d'une seule manière, de diviser les points de l'espace non situés dans ce plan en deux classes jouissant de la propriété suivante : si* A *et* A′ *sont deux points de la même classe,* (AA′) *ne contient aucun point de* α ; *si* A *et* B *sont deux points de deux classes différentes,* (AB) *contient un point de* α.

Démonstration. Soient A, B, B′ trois points non en ligne droite et non situés sur α.

Supposons que (AB) contienne un point O de α et que (BB′) ne contienne aucun point de α.

Les plans ABB′ et α ont une droite commune qui passe par O (§ 13) ; soit a cette droite commune. a ne passe ni par A, ni par B, ni par B′, puisque A, B, B′ ne sont pas dans α. Donc, a contient un point de (BB′) ou de (AB′) (§ 10, postulat II 4) ; a ne contient aucun point de (BB′) ; donc, a contient un point O′ de (AB′).

Cette remarque étant faite, il est facile de démontrer notre théorème par la même méthode que le théorème II 3 du § 10.

26. Définitions. Nous dirons que deux semi-droites sont *opposées* quand elles ont un support commun et une origine commune, mais sont distinctes.

Soit (h, k) un angle ; soient h' et k' les supports des semi-droites h et k ; soit α le plan défini par h' et k'. Soit (I) l'ensemble des points de α n'appartenant pas à h' et situés du même côté de h' que k ; soit (II) l'ensemble des points de α n'appartenant pas à k' et situés du même côté de k' que h. Tout point commun aux ensembles (I) et (II) est dit *intérieur* à l'angle (h, k).

Tout point de α n'appartenant ni à h, ni à k, et non intérieur à (h, k), est dit *extérieur* à (h, k).

27. Théorème. *Supposons donnés un angle (h, l) de sommet* O *et une semi-droite k, issue de* O, *située dans le plan de l'angle, et contenant un point intérieur à l'angle. Alors tous les points de k autres que* O *sont intérieurs à (h, l), et tout point autre que* O *de la semi-droite opposée à k est extérieur à (h, l).*

Définition. La semi-droite k dont il est question dans le théorème précédent est dite *intérieure* à (h, l) ou *située entre h* et l; on voit que c'est la même chose de dire que k est entre h et l ou est entre l et h.

28. Théorème. *Si une semi-droite k issue du sommet* O *d'un angle (h, l), et située dans le plan $h\,l$ est intérieure à (h, l), elle coupe en un point distinct des extrémités tout segment dont les deux extrémités sont distinctes de* O *et situées sur h et l respectivement.*

Démonstration. Soient A un point de h distinct de O, et C un point de l distinct de O ; menons AC. Je dis que k passe par un point situé entre A et C. En effet.

Soient h', k' et l' les supports de h, k et l ; soit A′ un point de h' tel que O soit entre A′ et A ; menons A′C. En considérant le triangle AA′C et la droite k' qui ne passe par aucun de ses sommets, on voit que k' contient un point de (A′C) ou de (AC) ; soit B ce point ; B est dans

tous les cas du même côté de h' que C. Tout point de k est du même côté de h' que C et tout point qui appartient à k' mais non à k est du côté opposé à celui de C par rapport à h' ; donc, B appartient à k; il s'ensuit que B est intérieur à (h, l). Mais, si B était entre A' et C, B et A' seraient du même côté de l', A' et A sont de côtés différents de l', B et A seraient de côtés différents de l', ce qui n'est pas. Donc, B est entre A et C. C. q. f. d.

29. Théorème. *Si une semi-droite k issue du sommet d'un angle (h, l) passe par un point intérieur à un segment dont les deux extrémités sont sur h et l respectivement, la semi-droite k est intérieure à (h, l) (si k dist. de h et de l).*

30. Théorème. *Etant donné un angle (h, l) de sommet O, on peut toujours mener par O dans le plan de l'angle une droite a telle que h et l soient du même côté de a; si une droite a jouit de cette propriété, les deux semi-droites en lesquelles O la partage sont extérieures à (h, l).*

Démonstration. Prenons l'un quelconque des deux côtés de l'angle, l par exemple; soit l' la semi-droite opposée à l; soit A un point intérieur à l'angle (h, l'). Désignons par a la droite OA. On voit aisément que a satisfait à la question. La seconde partie du théorème est une conséquence immédiate du § 28.

31. Théorème. *Soient a et a' deux semi-droites opposées issues d'un point O et b une semi-droite issue de O et n'appartenant pas au support de a et de a'. Soit k une semi-droite quelconque issue de O, distincte de a, a' et b, et située dans le plan $a\,b$ du même côté que b du support de a et de a'. Alors k est entre a et b ou entre b et a'; si k est entre b et a par exemple, b est entre k et a'.*

Démonstration. Soient A, A' et B trois points distincts de O situés respectivement sur a, a' et b. Pour établir la première partie du théorème, il suffit de considérer le support de k et le triangle A A' B.

Pour la seconde partie du théorème, il suffit de remarquer que b n'est pas entre k et a, et que donc, d'après la première partie, b est entre k et a'.

32. Théorème. *Le théorème* II 1 *du* § 10 *et le théorème du* § 16 *sont valables pour les semi-droites.*

Démonstration. Ce théorème se déduit immédiatement des théorèmes analogues pour les points et des §§ 28 et 29.

33. Théorème. *Etant données trois semi-droites distinctes dans un même plan, h, k et l, issues d'un même point* O, *et situées du même côté d'une droite a menée par* O *dans leur plan, une et une seule de ces trois semi-droites est située entre les deux autres.*

Démonstration. Soient a' et a'' les semi-droites en lesquelles O partage a. Prenons une quelconque des trois semi-droites données, h par exemple. k est entre h et a' ou entre h et a'' (§ 31); supposons k entre h et a''. l est aussi entre h et a' ou entre h et a'' (§ 31). Si l est entre h et a', h est entre l et a'' (§ 31) et h est entre l et k (§ 32). Si l est entre h et a'', l est entre h et k ou entre k et a'' (§ 32). Si l est entre k et a'', k est entre h et l (§ 32).

34. Définitions. Soient a et b deux droites distinctes ayant un point commun O. O divise a en deux semi droites a' et a''; de même O divise b en deux semi-droites b' et b''. En combinant de toutes les façons possibles deux à deux les 4 semi-droites a', a'', b' et b'', on trouve 4 angles : (a', b'), (a', b''), (a'', b'), et (a'', b''). Deux de ces angles tels que les côtés de l'un soient les semi-droites opposées aux côtés de l'autre sont dits *opposés par le sommet.* Deux de ces angles tels qu'ils aient un côté commun et que les deux autres côtés soient des semi-droites opposées sont dits *adjacents.*

Deux quelconques des quatre angles formés autour de O par a et b sont ou bien opposés par le sommet ou bien adjacents.

Théorème. *Toute semi-droite k' issue de* O, *située dans le plan a b, et distincte de a', a'', b' et b'', est intérieure à l'un des quatre angles formés par ces semi-droites autour de* O. *La semi-droite k'', opposée à k', est intérieure à l'angle opposé par le sommet à celui qui contient k'.*

Démonstration. k' est du même côté de a que b', ou

bien du même côté que b''. Dans le premier cas, k' est entre a' et b' ou entre b' et a'' (§ 31); dans le deuxième cas, k' est entre a' et b'' ou entre a'' et b''.

Supposons maintenant k' entre a' et b'. k' est du même côté de a que b' ; k' et k'' sont de côtés différents de a, de même que b' et b'' ; donc, k'' est du même côté de a que b'' ; de même, k'' est du même côté de b que a''.

C. q. f. d.

35. Remarque. Les §§ 13-34 nous permettent de résoudre les différentes questions simples qui peuvent se présenter concernant l'ordre de succession des points d'une droite, les points d'intersection d'une droite et du périmètre d'un triangle, et l'ordre de succession des semi-droites situées dans un même plan et issues d'un même point. Nous allons passer maintenant à l'étude de différentes propriétés relatives à la congruence des angles et des segments.

36. Théorème. *Quand on a dans deux triangles* ABC *et* A′B′C′ *les congruences*

$$(AB) \equiv (A'B'), \quad (AC) \equiv (A'C'), \quad \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C',$$

alors on a aussi les congruences

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C' \quad (1), \qquad \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B' \quad (2),$$
$$(BC) \equiv (B'C') \quad (3).$$

Démonstration. (1) et (2) résultent du postulat III 6 (§ 10). Supposons (3) faux. Il y a alors entre B et C un point qui détermine avec C un segment congruent à (B′C′) ou bien il y a entre B′ et C′ un point qui détermine avec C′ un segment congruent à (BC) (§ 10, postulat III 1); supposons par exemple que cette dernière éventualité se présente ; soit D′ le point en question ; menons A′D′. On a (§ 10, postulat III 6)

$$\sphericalangle D'A'C' \equiv \sphericalangle BAC.$$

Les semi-droites | A′B′ et | A′D′ sont distinctes et font toutes les deux avec | A′C′, dans un même plan et du même côté de A′C′, un angle congruent à $\sphericalangle$ BAC. Cela est impossible (§ 10, postulat III 4). On a donc

$$(BC) \equiv (B'C'). \qquad \text{C. q. d. f.}$$

37. Théorème. *Quand on a dans deux triangles* ABC *et* A′B′C′ *les congruences*

$$(AB) \equiv (A'B'),\ \sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle C'A'B',\ \sphericalangle CBA \equiv \sphericalangle C'B'A',$$

on a aussi

$$(AC) \equiv (A'C'),\quad (BC) \equiv (B'C'),\quad \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que $(AC) \equiv (A'C')$ (§ 36); on établit que $(AC) \equiv (A'C')$ en supposant que cette congruence n'ait pas lieu et en raisonnant ensuite tout à fait de la même façon qu'au § 36.

38. Théorème. *Si dans un triangle deux côtés sont congruents, les angles opposés à ces côtés sont aussi congruents et réciproquement.*

Démonstration. Supposons que dans le triangle ABC on a $(AC) \equiv (BC)$; je dis qu'on a $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BAC$. En effet.

Faisons correspondre de la manière suivante les sommets du triangle ABC à eux-mêmes :

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} A \ldots\ldots B, \\ B \ldots\ldots A, \\ C \ldots\ldots C. \end{array}\right.$$

On a

$$(AC) \equiv (BC) \quad \text{(par hypothèse)},$$
$$(BC) \equiv (AC) \quad \text{(théorème III 1, § 10)},$$
$$\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle BCA \quad \text{(postulat III 4, § 10)}.$$

On a donc, tout comme si les 3 points dans la colonne à droite du tableau (1) formaient un triangle distinct de celui formé par les 3 points dans la colonne à gauche,

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BAC \quad (\S\ 36). \qquad \text{C. q. f. d.}$$

La réciproque se démontre de la même façon en appliquant le § 37.

39. Théorème. *Etant données deux semi-droites quelconques* $|OA$ *et* $|O'A'$, *on peut toujours trouver sur* $|OA$ *et* $|O'A'$ *respectivement deux points déterminant avec* O *et* O′ *respectivement des segments congruents entre eux.*

Démonstration. Pour établir ce théorème, il suffit d'appliquer le postulat III 1 (§ 10) à (OA) et (O′A′).

40. Théorème. *Si deux angles sont congruents entre eux, deux angles adjacents respectivement aux deux premiers sont aussi congruents entre eux.*

Démonstration. Supposons ∢ ABC ≡ ∢ A′B′C′; soient ∢ DBC et ∢ D′B′C′ deux angles respectivement adjacents à ∢ ABC et à ∢ A′B′C′. Je dis que ∢ DBC ≡ ∢ D′B′C′. En effet.

Supposons (§ 39) les points A, C, D, A′, C′, D′ choisis de telle sorte qu'on ait

(BA) ≡ (B′A′), (BC) ≡ (B′C′), (BD) ≡ (B′D′).

Menons AC, DC, A′C′, D′C′. On a (§ 36) dans les triangles ABC et A′B′C′

(AC) ≡ (A′C′), ∢ BAC ≡ ∢ B′A′C′.

On a (§ 10, postulat III 3) (AD) ≡ (A′D′). On a donc (§ 36) dans les triangles ADC et A′D′C′

(CD) ≡ (C′D′), ∢ CDA ≡ ∢ C′D′A′.

Dans les triangles BCD et B′C′D′ on a finalement ∢ DBC ≡ ∢ D′B′C′ (§ 36). C. q. f. d.

41. Théorème. *Deux angles opposés par le sommet sont congruents.*

Démonstration. Ce théorème résulte directement du § 40.

42. Théorème. *Supposons donnés deux segments congruents* (AC) *et* (A′C′), *une des deux extrémités* A *du premier et une des extrémités* A′ *du second, et un point* B *situé entre* A *et* C; *alors il y a un point* B′ *et un seul situé entre* A′ *et* C′ *tel que* (AB) ≡ (A′B′); *pour ce point* B′, *on a en outre* (BC) ≡ (B′C′).

Démonstration. On établit très facilement que le point B′ existe et que ce point est unique en comparant (AB) et (A′C′) au moyen du postulat III 1 (§ 10). Pour établir que (BC) ≡ (B′C′), on compare au moyen du même postulat (BC) et (B′C′); s'il y avait par exemple un point D entre B et C tel que (BD) ≡ (B′C′), on aurait (AD) ≡ (A′C′) (postulat III 3, § 10), puisque B est entre A et D (théorème II 1, § 10); or, (AC) est déjà congruent à (A′C′); on arrive donc à une absurdité (postulat III 1, § 10).

43. Théorème. *Si* A, B *et* C *sont trois points en ligne droite et si* A′, B′ *et* C′ *sont aussi trois points alignés, si l'on a*

$$(AB) \equiv (A'B'), \quad (AC) \equiv (A'C'), \quad (BC) \equiv (B'C'),$$

et si B *est entre* A *et* C, B′ *est aussi entre* A′ *et* C′.

Démonstration. Il y a un point B″ et un seul entre A′ et C′ tel que (AB) ≡ (A′B″) et (BC) ≡ (B″C′) (§ 42). Supposons que B′ et B″ ne coïncident pas; alors, B′ n'est pas entre A′ et C′. B′ est sur | B″A′ ou sur | B″C′; supposons par exemple B′ sur | B″C′; alors B″ est entre A′ et B′, ce qui est impossible (postulat III 1. § 10). Donc, B′ coïncide avec B″. C. q. f. d.

44. Théorème. *Si les angles* (a, c) *et* (a', c') *sont congruents, si* b *est une semi-droite issue du sommet* O *de* (a, c) *et située dans le plan de* (a, c) *entre* a *et* c, *alors il y a une semi-droite* b' *et une seule, issue du sommet* O′ *de* (a', c') *et située dans le plan de* (a', c') *entre* a' *et* c', *telle que* $(a, b) \equiv (a', b')$; *pour cette semi-droite* b' *on a en outre* $(b, c) \equiv (b', c')$.

Démonstration. Prenons (§ 39) sur a, c. a' et c' respectivement 4 points A, C, A′ et C′ tels que

$$(OA) \equiv (O'A'), \quad (OC) \equiv (O'C').$$

Menons AC et A′C′ ; en considérant les triangles OAC et O′A′C′, on voit que (AC) ≡ (A′C′), ∢ CAO ≡ ∢ C′A′O′ et ∢ ACO ≡ ∢ A′C′O′. La semi-droite b contient un point B intérieur à (AC) (§ 28) Il y a un point B′ et un seul entre A′ et C′ tel que (AB) ≡ (A′B′) (§ 42) Menons O′B′ et désignons | O′B′ par b' ; b' est entre a' et c' (§ 29) En considérant les triangles AOB et A′O′B′ on voit que $(a, b) \equiv (a', b')$.

On voit facilement que, le point B′ étant unique, la semi-droite b' est aussi unique

Enfin, on a (BC) ≡ (B′C′) (§ 42); en considérant les triangles BOC et B′O′C′, on trouve que $(b, c) \equiv (b', c')$.

Le théorème est donc complètement établi.

45. Théorème. *Supposons données trois semi-droites coplanaires* a, b *et* c, *issues d'un même point* O, b *étant*

entre a et c; supposons aussi données trois semi-droites coplanaires a', b' et c', issues d'un même point O', b' étant entre a' et c'; supposons qu'on a

$$(a, b) \equiv (a', b'), \quad (b, c) \equiv (b', c');$$

alors les angles (a, c) et (a', c') sont congruents.

Démonstration. Soient A et A' deux points de a et de a' distincts de O et de O' tels que (OA) ≡ (O'A'); soient C_1 et C'_1 deux points quelconques de c et de c' distincts respectivement de O et de O'; menons AC_1 et $A'C'_1$. b coupe (AC_1) en B_1 et b' coupe $(A'C'_1)$ en B'_1. On peut trouver un point B sur (OB_1) et un point B' sur $(O'B'_1)$ tels que (OB) ≡ (O'B'). AB coupe c en C et A'B' coupe c' en C' (§ 19); B est entre A et C, B' est entre A' et C' (§ 28). En considérant les triangles AOB et A'O'B' on trouve

$$(AB) \equiv (A'B'), \quad \measuredangle BAO \equiv \measuredangle B'A'O', \quad \measuredangle ABO \equiv \measuredangle A'B'O'.$$

On a donc (§ 40)

$$\measuredangle CBO \equiv \measuredangle C'B'O'.$$

Par la considération des triangles BOC et B'O'C' on trouve

$$(BC) \equiv (B'C').$$

On a donc (AC) ≡ (A'C') (postulat III 3, § 10) et dans les triangles CAO et C'A'O' on trouve $\measuredangle COA \equiv \measuredangle C'O'A'$.

C. q. f. d

46. Théorème. *Si a, b et c sont trois semi-droites coplanaires issues d'un même point O et si a', b' et c' sont aussi trois semi-droites coplanaires issues d'un même point O', si l'on a*

$$(a, b) \equiv (a', b'), \quad (a, c) \equiv (a', c'), \quad (b, c) \equiv (b', c'),$$

et si b est entre a et c, b' est aussi entre a' et c'.

Démonstration. Il y a (§ 44) une semi-droite b_1 issue de O' et située dans le plan de (a', c') entre a' et c' telle que

$$(a, b) \equiv (a', b_1), \quad (b, c) \equiv (b_1, c').$$

Pour démontrer le théorème, il suffit de prouver que b' coïncide avec b_1.

Supposons que b' ne coïncide pas avec b_1. Soient a'' et c'' les semi-droites opposées à a' et c' respectivement;

b' est distinct de a', c', a'' et c'' (définition de l'angle). b' n'est pas entre a' et c' (§ 44), ni entre a'' et c' (postulat III 4, § 10), ni entre a' et c'' (même postulat). Donc, b' est entre a'' et c'' (§ 34). On a $(a', b_1) \equiv (a', b')$ (postulat III 5, § 10). Donc, $(a'', b_1) \equiv (b', a'')$ (§ 40). c' est entre b_1 et a'' (§ 31). Il y a une semi-droite d' entre a'' et b' telle que $(b', d') \equiv (b_1, c')$ (§ 44). a'' est entre b' et c', d' est entre b' et c' (§ 32). On a

$$(b', c') \equiv (b, c)$$
$$(b', d') \equiv (b_1, c') \equiv (b, c).$$

Ces deux congruences ne peuvent avoir lieu simultanément puisque d', étant entre b' et c', est situé du même côté que c' du support de b'.

Donc, b' coïncide avec b_1 et est entre a' et c'.

C. q. f. d.

47. Théorème. *Si a, b et c sont trois semi-droites coplanaires issues d'un même point O et si a', b' et c' sont aussi trois semi-droites coplanaires issues d'un même point O', si l'on a*

$$(a, b) \equiv (a', b'), \quad (c, b) \equiv (c', b'),$$

si b est entre a et c et si a' et c' sont de côtés différents du support de b', b' est entre a' et c'.

Démonstration. Soient a_1 la semi-droite opposée à a et a'_1 celle opposée à a'. On a $(a_1, b) \equiv (a'_1, b')$ (§ 40); c est entre b et a_1 (§ 31); il y a une semi-droite c'', issue de O' et située dans le plan de a' et de b' entre b' et a'_1 telle que $(b, c) \equiv (b', c'')$ et $(c, a_1) \equiv (c'', a'_1)$ (§ 44). b' est entre a' et c''; donc, a' et c'' sont situés de part et d'autre du support de b' (§ 28); comme c' et a' sont aussi situés de part et d'autre du support de b', c' et c'' sont situés du même côté de ce support. Comme (b', c'') et (b', c') sont tous les deux congruents à (b, c), c' et c'' coïncident (postulat III 4, § 10). Donc, a' et c' forment bien un angle et b' est intérieur à cet angle. C. q. f. d.

48 Définitions. Donnons nous deux segments (AB) et (A'B'), une extrémité A du premier et une extrémité

A′ du second. S'il y a un point B_1 entre A et B tel que $(AB_1) \equiv (A'B')$, nous écrirons

$$(AB)_A > (A'B')_{A'} \quad \text{ou} \quad (A'B')_{A'} < (AB)_A$$

On voit immédiatement par le postulat III 1 (§ 10) qu'on a ou bien $(AB) \equiv (A'B')$, ou bien $(AB)_A > (A'B')_{A'}$, ou bien $(AB)_A < (A'B')_{A'}$.

On voit aussi par le § 42 que si l'on a $(AB)_A > (A'B')_{A'}$, on a aussi $(AB)_B > (A'B')_{A'}$; il résulte d'ailleurs de la définition du segment que si l'on a $(AB)_A > (A'B')_{A'}$, on a aussi $(AB)_A > (A'B')_{B'}$. La relation $(AB)_A > (A'B')_{A'}$ est donc complètement indépendante du choix des extrémités des segments prises comme points de départ; nous écrirons à l'avenir $(AB) > (A'B')$. Si l'on a $(AB) > (A'B')$, nous dirons que le premier segment est *plus grand* que le second et que le second est *plus petit* que le premier. On a le théorème suivant.

THÉORÈME. *Etant donnés deux segments, ou bien ils sont congruents, ou bien le premier est plus grand que le second, ou bien le premier est plus petit que le second.*

On démontre maintenant avec la plus grande facilité ce qui suit.

THÉORÈME. *Etant donnés les segments* (AB) *et* (CD) *tels que* $(AB) > (CD)$, *si* $(A'B') \equiv (AB)$, *on a* $(A'B') > (CD)$; *si* $(C'D') \equiv (CD)$, *on a* $(AB) > (C'D')$; *si* $(CD) > (EF)$, *on a* $(AB) > (EF)$.

49. DÉFINITIONS. Donnons nous deux angles (a, b) et (a', b'), un côté a du premier et un côté a' du second. On définit exactement comme au § 48 la relation

$$(a, b)_a > (a', b')_{a'}.$$

Si l'on a $(a, b)_a > (a', b')_{a'}$, on a $(a, b)_b > (a', b')_{a'}$ (§ 44) et aussi $(a, b)_a > (a', b')_{b'}$ (définition de l'angle). Nous écrirons donc simplement $(a, b) > (a', b')$, pour le même motif qu'au § 48, et nous dirons que (a, b) est *plus grand* que (a', b') et que (a', b') est *plus petit* que (a, b).

THÉORÈME. *Etant donnés deux angles* (a, b) *et* (a', b'), *on a ou bien* $(a, b) > (a', b')$, *ou bien* $(a, b) \equiv (a', b')$, *ou bien* $(a, b) < (a', b')$.

Démonstration. Soient O et O′ les sommets de (a, b) et de (a', b') respectivement et soient s et s' les semi-droites opposées à a et a' respectivement. Il existe une semi-droite b_1 et une seule, issue de O et située dans le plan de (a, b) du même côté du support de a que b, telle que $(a, b_1) \equiv (a', b')$ (postulat III 4, § 10). D'après le § 31, une et une seule des trois éventualités suivantes se présente.

1°) b_1 est entre a et b. Alors $(a, b) > (a', b')$.

2°) b_1 coïncide avec b. Alors $(a, b) \equiv (a', b')$.

3°) b_1 est entre s et b. Alors b est entre a et b_1, et il y a une semi-droite entre a' et b' qui fait avec a' un angle congruent à (a, b). On a donc alors $(a, b) < (a', b')$.

C. q. f. d.

Théorème *Supposons donnés deux angles* (a, b) *et* (c, d), (a, b) *étant supérieur à* (c, d); *si* $(a', b') \equiv (a, b)$, *on a* $(a', b') > (c, d)$; *si* $(c', d') \equiv (c, d)$, *on a* $(a, b) > (c', d')$; *si* $(c, d) > (e, f)$, *on a* $(a, b) > (e, f)$.

50. Théorème. *Si dans deux triangles* ABC *et* A′B′C′ *on a*

$$(AB) \equiv (A'B'), \quad (BC) \equiv (B'C'), \quad (CA) \equiv (C'A'),$$

on a aussi

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C', \quad \sphericalangle BCA \equiv \sphericalangle B'C'A', \quad \sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle C'A'B'.$$

Démonstration. Supposons la thèse fausse.

Désignons pour plus de brièveté les angles $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle A'B'C'$, ... par $\sphericalangle B$, $\sphericalangle B'$, ... On n'a pas $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, ni $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$, ni $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$, car si l'une de ces congruences avait lieu, le théorème serait vrai (§ 36).

Donc, on a $\sphericalangle A > \sphericalangle A'$ ou $\sphericalangle A < \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B \gtrless \sphericalangle B'$ et $\sphericalangle C \gtrless \sphericalangle C'$ (§ 49) Nous avons donc nécessairement un des cas (1), (2), (3), (4), (5) ou (6).

$\sphericalangle A > \sphericalangle A'$
- $\sphericalangle B > \sphericalangle B'$ (1)
- $\sphericalangle B < \sphericalangle B'$
  - $\sphericalangle C > \sphericalangle C'$ (2)
  - $\sphericalangle C < \sphericalangle C'$ (3)

$\sphericalangle A < \sphericalangle A'$
- $\sphericalangle B > \sphericalangle B'$
  - $\sphericalangle C > \sphericalangle C'$ (4)
  - $\sphericalangle C < \sphericalangle C'$ (5)
- $\sphericalangle B < \sphericalangle B'$ (6)

Dans chacun de ces cas on peut trouver dans l'un des triangles deux angles supérieurs respectivement aux angles correspondants dans le deuxième triangle. Nous pouvons toujours désigner les sommets de ces deux angles dans le premier triangle par A et B, et nous serons alors dans le cas (1).

Il existe une semi-droite située entre | AB et | AC qui fait avec | AB un angle congruent à ∢ A′. Elle coupera BC en un point situé entre B et C; soit D ce point. Il existe une semi-droite située entre | BA et | BC qui fait avec | BA un angle congruent à ∢ B′. Elle coupera AD en un point situé entre A et D; soit C″ ce point. C″ est intérieur au triangle ABC (§ 22); CC″ coupe AB entre A et B, en F, et C″ est entre C et F (§ 24); BC″ coupe AC en E, entre A et C, et C″ est entre B et E. On a (AC″) ≡ (A′C′) (§ 37) et (AC″) ≡ (AC) (postulat III 2, § 10); de même, (BC″) ≡ (BC). On a donc (§ 38)

∢ ACC″ ≡ ∢ AC″C
∢ BCC″ ≡ ∢ BC″C.

| CC″ est entre | CA et | CB; | C″A et | C″B sont de part et d'autre du support de | C″C. Donc, | C″C est entre | C″A et | C″B (§ 47). Donc, | C″C passe par un point de (AB), qui ne peut être autre que F; donc, F est sur | C″C. Or, F n'est pas sur | C″C. Nous arrivons donc à une contradiction, et parconséquent le théorème est vrai. C. q. f. d.

51. Définition. Lorsque deux angles adjacents sont congruents entre eux, chacun de ces angles est appelé un angle *droit*.

Théorème. *Tous les angles droits sont congruents entre eux.*

Démonstration. Supposons donnés les angles adjacents congruents entre eux (b, a) et (b, c) d'une part, (b', a') et (b', c') d'autre part. Soient O le sommet des deux premiers, O′ le sommet des deux derniers. Ces quatre angles sont droits. Montrons que $(b, a) \equiv (b', a')$.

Supposons la thèse fausse. Il existe une semi-droite

b'' et une seule, issue de O, et située dans le plan de $a\,b$ du même côté du support de a que b telle que $(a, b'') \equiv (a', b')$. b'' est distinct de b ; b'' est donc entre a et b ou entre b et c. Supposons par exemple b'' entre a et b (l'autre cas se traite exactement de la même façon). On a d'abord

$$(b'', c) \equiv (b', c') \equiv (a', b') \equiv (a, b'').$$

On peut donc écrire

$$(a, b) > (a, b'') \equiv (b'', c) > (b, c).$$

Or, on a

$$(a, b) \equiv (b, c).$$

On a donc à la fois $(a, b) \equiv (b, c)$ et $(a, b) > (b, c)$, ce qui est impossible. Donc, $(b, a) \equiv (b', a')$ C. q. f. d.

52. Définition. Lorsqu'une semi-droite b issue de O fait avec deux semi-droites opposées a et a' issues du même point des angles droits, alors la semi-droite b', opposée à b, fait aussi avec a et a' des angles droits (§ 41), et les quatre angles déterminés autour de O par les supports de a et de b sont droits.

Lorsque deux droites distinctes qui ont un point commun déterminent en ce point quatre angles droits, elles sont dites *perpendiculaires ;* deux semi-droites sont dites perpendiculaires lorsque leurs supports sont perpendiculaires ; une semi-droite et une droite sont dites perpendiculaires lorsque le support de la semi-droite et la droite sont perpendiculaires.

53. Théorème. *On peut toujours diviser, et d'une seule manière, un angle en deux parties congruentes entre elles.*

Démonstration. Soit ∡ ABC un angle. Il s'agit de montrer qu'il y a une semi-droite et une seule issue de B, située dans le plan ABC entre | BA et | BC, et faisant avec | BA et | BC des angles congruents entre eux.

Prenons les points A et C tels que (BA) ≡ (BC). Prenons un point A′ entre A et B et un point C′ entre B et C tel que (BA′) ≡ (BC′). Menons CA′ et C′A. Les droites CA′ et C′A se coupent en un point M situé entre C et A′ et entre C′ et A. Le point M est intérieur à ∡ ABC de même que | BM.

Par la considération des triangles CA'B et C'AB on trouve $\sphericalangle$ BCA' ≡ $\sphericalangle$ BAC' et $\sphericalangle$ BC'A ≡ $\sphericalangle$ BA'C ; on a donc aussi $\sphericalangle$ CC'A ≡ $\sphericalangle$ AA'C. Par la considération des triangles CC'M et AA'M on trouve (CM) ≡ (AM), et dans les triangles CBM et ABM on trouve $\sphericalangle$ CBM ≡ $\sphericalangle$ ABM.

La semi-droite | BM divise donc l'angle donné en deux parties congruentes. On montre qu'elle jouit seule de cette propriété en raisonnant comme au § 51.

54. Théorème. *Etant donnés une droite p, un point O sur p et un plan α passant par p, il existe une droite et une seule passant par O et située dans α qui est perpendiculaire à p.*

Démonstration. Soient p' et p'' les deux semi-droites en lesquelles O divise p. Menons de O une semi-droite quelconque a', située dans le plan α, mais non sur p. Si $(p', a') \equiv (a', p'')$, le support de a' est perpendiculaire à p. Si les angles (p', a') et (a', p'') ne sont pas congruents, l'un est plus grand que l'autre ; supposons par exemple $(a', p'') > (p', a')$. Il y a une semi-droite a'' entre a' et p'' telle que $(p'', a'') \equiv (p', a')$. a' est alors entre p' et a''. Menons la semi-droite q' qui divise l'angle (a', a'') en deux parties congruentes entre elles (§ 53). a' est entre p' et q' et a'' est entre q' et p''. Par conséquent, $(p', q') \equiv (p'', q')$ (§ 45) et le support de q' est perpendiculaire à p. D'après le § 51, la perpendiculaire est unique.

C. q. f. d.

55. Théorème. *On peut toujours diviser un segment d'une seule manière en deux parties congruentes entre elles.*

Démonstration. Soit un segment (AB). Je dis qu'il y a un point M et un seul entre A et B tel que (MA) ≡ (MB) En effet.

Soit C un point quelconque non situé sur la droite AB; menons CA, CB. Ou bien $\sphericalangle$ CAB et $\sphericalangle$ CBA sont congruents, ou bien ils ne le sont pas. S'ils ne le sont pas, l'un est plus grand que l'autre ; supposons par exemple $\sphericalangle$ CBA > $\sphericalangle$ CAB. Il y a une semi-droite entre | BC et | BA qui fait avec | BA un angle congruent à $\sphericalangle$ CAB;

cette semi-droite coupe (AC) en C'. On a (AC') ≡ (BC') (§ 38). Il y a une semi-droite entre |C'A et |C'B qui détermine avec ces semi-droites des angles congruents entre eux (§ 53) ; cette semi-droite coupe (AB) en M ; par les triangles AC'M et BC'M on voit que (AM) ≡ (BM). On voit sans peine par le § 48 que le point M jouit seul de cette propriété. C. q. f. d.

56. Théorème. *Le lieu des points* P *d'un plan tels que* (PA) ≡ (PB), A *et* B *étant deux points distincts du plan, est la perpendiculaire élevée dans le plan au milieu* M *de* (AB) *à la droite* AB.

Démonstration. Il suffit de considérer les triangles PMA et PMB.

57. Définitions. Supposons donnés dans un certain ordre un nombre fini de points distincts coplanaires ; soient A_1, A_2, ..., A_n ces points ; considérons le dernier point A_n comme consécutif au premier A_1. Il y a alors dans la suite de points n couples de points consécutifs, A_1 et A_2, A_2 et A_3, ..., A_{n-1} et A_n, A_n et A_1. On appelle *polygone plan* la figure formée par les n segments déterminés par les n couples de points consécutifs. Comme dans ce livre nous n'aurons d'autres polygones à considérer que des polygones plans, nous employrons le mot polygone comme synonyme de polygone plan. Les segments (A_1A_2), (A_2A_3), ..., $(A_{n-1}\,A_n)$ et $(A_n\,A_1)$ sont les *côtés* du polygone ; les extrémités de ces segments sont ses *sommets*.

Si les $n-2$ sommets d'un polygone autres que deux sommets consécutifs donnés sont situés dans son plan d'un même côté de la droite déterminée par ces deux sommets (et non sur cette droite), quelque soit le couple de sommets consécutifs choisi, le polygone est dit *convexe*,

On appelle *angles* d'un polygone les différents angles $\sphericalangle A_jA_{j+1}A_{j+2}$, A_j, A_{j+1} et A_{j+2} désignant trois sommets consécutifs.

On appelle *quadrilatère* un polygone de quatre côtés. Comme nous n'aurons d'autres quadrilatères à considérer

que des quadrilatères convexes, nous emploierons dorénavant le mot quadrilatère comme synonyme de quadrilatère convexe.

Si dans un quadrilatère deux angles non opposés sont droits, on dit que le quadrilatère est *birectangle*; si trois angles sont droits on dit qu'il est *trirectangle*. Si dans un quadrilatère birectangle les côtés non opposés au côté joignant les sommets des angles droits sont congruents, il est dit *isoscèle*. Si dans un quadrilatère les quatre angles sont droits, il est appelé un *rectangle*.

58. Théorème. *Il est impossible qu'une droite qui n'est pas le support d'un côté ait trois points communs avec le périmètre d'un polygone convexe.*

Démonstration. Supposons que la droite *a* qui n'est pas le support d'un côté ait les trois points A, B, C communs avec le périmètre d'un polygone convexe; soit B celui de ces trois points qui est entre les deux autres. Le point B se trouve sur un côté du polygone; soit *b* le support de ce côté. Les droites *a* et *b* sont distinctes, et les points A et C ne sont donc pas sur *b*. Ces points sont donc dans le plan du polygone de deux côtés différents de *b*. Or, tous les points du périmètre du polygone sont sur *b* ou dans un même demi-plan limité par *b*. Nous arrivons donc à une contradiction.

59. Théorème. *Si une droite située dans le plan d'un polygone convexe coupe le périmètre de ce polygone en un point distinct des sommets, elle coupe le périmètre encore en un seul autre point.*

Démonstration. Soient $A_1 A_2 \ldots A_n$ un polygone convexe et *a* une droite située dans le plan du polygone et coupant le côté (A_1A_2) en un point B distinct de A_1 et de A_2. *a* passe par un point de (A_1A_3) ou de (A_2A_3) (§ 21). Supposons que *a* passe par un point de (A_1A_3) distinct de A_3. Alors *a* passe par un point de (A_1A_4) ou de (A_3A_4) (§ 21). En continuant ainsi on voit que *a* doit nécessairement passer par un deuxième point C du périmètre. *a* ne peut d'ailleurs avoir d'autres points que B et C communs avec le périmètre (§ 58). De là résulte le théorème.

60. Définition. Tout point intérieur à un segment déterminé par deux points du périmètre d'un polygone convexe non situés sur un même côté est dit *intérieur* au polygone.

61. Théorème. *Si un point* B *est intérieur à un polygone convexe, toute droite passant par* B *et située dans le plan du polygone coupe le périmètre du polygone en deux points situés de part et d'autre de* B.

Démonstration. Soient $A_1A_2...A_n$ le polygone convexe et a la droite passant par B et située dans le plan du polygone. Comme B est intérieur au polygone, il existe une droite b passant par B et située dans le plan du polygone qui coupe son périmètre en deux points C et D entre lesquels B est situé (§ 60). Si a coïncide avec b, le théorème est établi ; supposons a distinct de b. Supposons que C soit situé entre A_1 et A_2 ou coïncide avec A_1 ; cette hypothèse ne restreint évidemment en rien la généralité du raisonnement. Considérons successivement les points C, A_1, A_n, A_{n-1}, ... Il existe dans cette suite un point A_l tel que les segments (CA_1), (A_1A_n), (A_nA_{n-1}), ..., $(A_{l+1}A_l)$ ne contiennent pas D mais que le segment (A_lA_{l-1}) contienne D. De même, dans la suite de points C, A_2, A_3, ... il existe un point A_k tel que les segments (CA_2), (A_2A_3), ..., $(A_{k-1}A_k)$ ne contiennent pas D mais que le segment (A_kA_{k+1}) contienne D. On voit aisément que ou bien A_l et A_k seront deux sommets consécutifs du polygone entre lesquels D est situé, ou bien D sera lui-même un sommet, A_l étant le sommet suivant et A_k le sommet précédent.

Supposons d'abord C entre A_1 et A_2. On voit aisément que $CA_1A_nA_{n-1}...A_{l+1}A_lD$ et $CA_2A_3...A_{k-1}A_kD$ sont deux polygones convexes situés de part et d'autre de b.

Supposons ensuite que C coïncide avec A_1. On voit aisément que $A_1A_nA_{n-1}...A_{l+1}A_lD$ et $A_1A_2A_3...A_{k-1}A_kD$ sont deux polygones convexes. De plus, D est certainement intérieur à $(\mid A_1A_2, \mid A_1A_n)$, d'où l'on déduit que les deux polygones $A_1A_nA_{n-1}...A_{l+1}A_lD$ et $A_1A_2A_3...A_{k-1}A_kD$ sont encore situés de part et d'autre de b.

Dans tous les cas, *b* divise donc le polygone donné en deux autres polygones convexes ayant le côté (CD) commun et situés de part et d'autre de *b*. *a* coupe le périmètre du premier de ces polygones en un seul deuxième point E et le périmètre du second en un seul deuxième point F, B étant chaque fois le premier point d'intersection (§ 59). E et F ne sont pas situés sur *b*, ils sont donc situés de part et d'autre de *b* et B est entre E et F.

C. q. f. d.

62. Théorème. *Supposons donnés deux points distincts* A *et* B, *une droite a passant par* A *et distincte de* AB, *et une droite b passant par* B, *distincte de* AB *et située dans le plan a*B. *On peut toujours trouver deux points* A_1 *et* B_1 *sur a et sur b tels que* A_1 *et* B_1 *soient situés du même côté de* AB *et tels que a ne passe par aucun point de* (BB_1) *et b par aucun point de* (AA_1). *Chaque fois que* A_1 *et* B_1 *sont choisis de cette façon,* ABB_1A_1 *est un quadrilatère convexe.*

Démonstration. La première partie du théorème s'établit sans la moindre difficulté Pour la seconde partie, on peut raisonner comme suit. B et B_1 sont du même côté de AA_1, B_1 et A_1 du même côté de AB, A_1 et A du même côté de BB_1. Si A et B n'étaient pas du même côté de A_1B_1, la droite A_1B_1 passerait par un point C de (AB); C n'est pas entre A_1 et B_1. Supposons par exemple B_1 entre A_1 et C. Alors C et A_1 sont de côtés différents de BB_1, A et C sont du même côté de BB_1, ce qui est impossible, puisque A et A_1 sont du même côté de BB_1. Donc, A et B sont du même côté de A_1B_1, et ABB_1A_1 est un quadrilatère convexe.

C. q. f. d.

63. Théorème. *Les segments déterminés par les deux couples de sommets opposés d'un quadrilatère ont un point commun.*

Démonstration. Soit ABCD un quadrilatère. C est intérieur à $\sphericalangle$ DAB; par conséquent (DB) contient un point de AC; de même (AC) contient un point de DB. De là résulte le théorème.

64. Théorème. *Il existe des quadrilatères birectangles isoscèles.*

Démonstration. Prenons deux points distincts A et B, et un plan passant par AB. Elevons en A et en B dans ce plan les perpendiculaires à AB. On peut prendre sur ces perpendiculaires respectives du même côté de AB deux points A′ et B′ tels que (AA′) ne contienne aucun point de BB′ et que (BB′) ne contienne aucun point de AA′ (§ 62). On peut de plus prendre A′ et B′ tels que (AA′) ≡ (BB′). Alors ABB′A′ sera un quadrilatère (§ 62) birectangle isoscèle (§ 57).

65. Théorème. *Dans tout quadrilatère birectangle isoscèle les angles opposés aux angles droits sont congruents entre eux, et la perpendiculaire élevée au milieu du côté joignant les sommets des angles droits au support de ce côté dans le plan du quadrilatère passe par le milieu du côté opposé et lui est perpendiculaire* (1).

Démonstration. Soit ABB′A′ un quadrilatère birectangle isoscèle, les angles droits étant en A et en B ; soient M le milieu de (AB) et M′ celui de (A′B′). M et M′ sont du même côté de AA′ ; comme ABB′A′ est un quadrilatère, AB ne passe par aucun point de (A′B′) et A′B′ ne passe par aucun point de (AB) ; donc, AM ne passe par aucun point de (A′M′) et A′M′ par aucun point de (AM) ; AMM′A′ est donc un quadrilatère (§ 62), de même que MBB′M′.

Par les triangles AA′M et BB′M on trouve ∢ AA′M ≡ ∢ BB′M, ∢ AMA′ ≡ ∢ BMB′ et (A′M) ≡ (B′M). Par les triangles A′MM′ et B′MM′ on trouve ∢ A′M′M ≡ ∢ B′M′M, ∢ MA′M′ ≡ ∢ MB′M′ et ∢ A′MM′ ≡ ∢ B′MM′. Donc, MM′ est perpendiculaire à A′B′. Comme AMM′A′ et MBB′M′ sont des quadrilatères, | A′M est entre | A′M′ et | A′A, | B′M entre | B′M′ et | B′B, | MA′ entre | MA et | MM′, et | MB′ entre | MB et | MM′. On a donc ∢ AA′B′ ≡ ∢ BB′A′ et ∢ AMM′ ≡ ∢ BMM′. MM′ est donc perpendiculaire à AB. Comme la perpendiculaire en M à AB dans le plan ABB′A′ est unique, le théorème se trouve complètement établi.

---

(1) Ce théorème est dû à Saccheri, que nous avons cité au § 8.

66. Théorème. *Si deux droites distinctes a et b sont perpendiculaires à une même troisième droite p en un même point* P, *alors p est perpendiculaire à toute droite c menée dans le plan de a et de b par* P.

Démonstration. Soit c_1 une des deux semi-droites déterminées par P sur c. c_1 est intérieur à l'un des quatre angles formés par a et b autour de P; soient a_1 et b_1 les semi-droites déterminées respectivement sur a et b par P qui comprennent c_1 dans leur angle. Prenons deux points A et A′ sur a_1 et sur la semi-droite opposée et deux points B et B′ sur b_1 et sur la semi-droite opposée tels que $(PA) \equiv (PA')$, $(PB) \equiv (PB')$. Menons AB et A′B′; (AB) contient un point C de c_1 et (A′B′) contient un point C′ de la semi-droite opposée à c_1. Soit Q un point quelconque de p distinct de P; menons QA, QB, QC, QA′, QB′ et QC′.

Par la considération de triangles on trouve sans difficulté successivement

$$(AB) \equiv (A'B'), \quad \sphericalangle ABP \equiv \sphericalangle A'B'P, \quad (BC) \equiv (B'C'),$$
$$(PC) \equiv (PC'), \quad (AQ) \equiv (A'Q), \quad (BQ) \equiv (B'Q)$$
$$\sphericalangle QBA \equiv \sphericalangle QB'A', \quad (CQ) \equiv (C'Q), \quad \sphericalangle QPC \equiv \sphericalangle QPC'.$$

C. q. f. d.

67. Théorème. *Toutes les droites perpendiculaires à une droite donnée en un point donné sont coplanaires.*

Démonstration. Soient une droite p, un point P sur p et trois droites distinctes a, b, c perpendiculaires en P à p. Je dis que b appartient au plan ac; en effet.

Les plans pb et ac sont distincts; sinon, p serait dans le plan ac, ce qui est impossible (§ 54). Les plans pb et ac se coupent donc suivant une droite (§ 13); soit b' cette droite. b' est perpendiculaire à p (§ 66). et coïncide donc avec b (§ 54). b est donc dans le plan ac. C. q. f. d.

68. Définition. Si une droite non située dans un plan et ayant un point commun avec ce plan est perpendiculaire à toutes les droites menées dans le plan par le point de percée, la droite donnée est dite *perpendiculaire* au plan donné, et le plan est dit perpendiculaire à la droite.

Il arrivera dans la suite que nous parlerons de semi-

droite ou de demi-plan, lorsqu'il s'agira d'une droite perpendiculaire à un plan. Chaque fois que cela arrive, il sera sous-entendu que dans la question de la perpendicularité il faut considérer le support de la semi-droite et le support du demi-plan (cf. § 52).

69. Théorème. *Par un point d'une droite on peut mener un plan et un seul perpendiculaire à la droite.*

Démonstration. Ce théorème se démontre immédiatement au moyen des §§ 66 et 67.

70. Théorème. *Par un point* P *d'un plan on peut mener une droite et une seule perpendiculaire au plan.*

Démonstration. Il suffit pour établir le théorème de mener par P dans le plan donné deux droites distinctes *a* et *b* et de considérer l'intersection des deux plans perpendiculaires en P à *a* et *b* respectivement.

71. Théorème *Si une droite p est perpendiculaire à un plan en* P, *si a est une droite de ce plan ne passant pas par* P, *si* A *est un point de a, si* PA *est perpendiculaire à a et si* Q *est un point de p, alors* QA *est aussi perpendiculaire à a.*

72. Théorème. *Le lieu des points de l'espace situés à des distances congruentes de deux points distincts* A *et* B *est le plan perpendiculaire à* AB *au milieu* M *de* (AB).

Démonstration La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème du § 56.

73. Théorème. *Deux perpendiculaires à un même plan sont dans un même plan.*

Démonstration. Soient *a* et *b* deux droites perpendiculaires en A et B à un même plan α. Menons AB. Élevons en A la perpendiculaire AP à AB dans le plan α. Soit B′ un point de *b* autre que B ; menons B′A. B′A est perpendiculaire à PA (§ 71). *a*, étant perpendiculaire à PA, est dans le plan de AB′ et de AB (§ 67) *a* et *b* sont donc dans un même plan.

74. Définitions. On appelle *angle dièdre* la figure formée par deux demi-plans α et β limités par une même droite *p* mais n'appartenant pas à un même plan

Soit P un point de *p*. Élevons en P dans chacun des

plans auxquels appartiennent α et β la perpendiculaire à p. Soient a et b les semi-droites situées dans α et β respectivement déterminées par P sur ces perpendiculaires. Un angle tel que (a, b) est dit un *angle plan* de l'angle dièdre (α, β).

75. Théorème. *Deux angles plans d'un même angle dièdre sont congruents.*

Démonstration. Soient $\sphericalangle$APB et $\sphericalangle$A′P′B′ deux angles plans d'un même angle dièdre. Supposons A et A′ situés dans l'une des faces, B et B′ dans l'autre. PP′ est l'arrête de l'angle dièdre. Prenons A, B, A′ et B′ de telle façon que PA ne passe par aucun point de (P′A′), P′A′ par aucun point de (PA), PB par aucun point de (P′B′) et P′B′ par aucun point de (PB), et que (P′A′) ≡ (PA), (P′B′) ≡ (PB).

PP′A′A et PP′B′B sont des quadrilatères birectangles isoscèles, les angles droits étant en P et P′ (§ 64).

Soient M le milieu de (PP′), A″ celui de (AA′) et B″ celui de (BB′) (§ 55). Les angles $\sphericalangle$A′A″M, $\sphericalangle$AA″M, $\sphericalangle$A″MP, $\sphericalangle$A″MP′, $\sphericalangle$B″MP, $\sphericalangle$B″MP′, $\sphericalangle$B′B″M, $\sphericalangle$BB″M sont droits (§ 65), et $\sphericalangle$A″MB″ est aussi un angle plan de l'angle dièdre donné (§ 74).

Menons A′B′, A″B″ et AB. Élevons en A″ la perpendiculaire au plan A″MB″ (§ 70). Elle est dans le plan A″MP′ (§ 73), puisque P′M est aussi perpendiculaire au plan A″MB″. Or, A′A″ est aussi dans le plan A″MP′ et perpendiculaire à A″M. Donc, A′A″ coïncide avec la perpendiculaire élevée en A″ au plan A″MB″, et A′A″ est perpendiculaire à A″B″. De même, B′B″ est perpendiculaire à A″B″.

AA′ et BB′ sont coplanaires, comme perpendiculaires à un même plan (c. à d. le plan A″MB″).

Tous les points communs aux deux plans APP′ et BPP′ sont sur PP′; AA′ ne peut donc passer par aucun point de (BB′) et BB′ ne peut passer par aucun point de (AA′); A″B″BA et A″B″B′A′ sont donc des quadrilatères (§ 62). Par la considération de triangles et en appliquant le § 65, on trouve successivement (A″B) ≡ (A″B′), $\sphericalangle$BA″B″ ≡ $\sphericalangle$B′A″B″, $\sphericalangle$BA″A ≡ $\sphericalangle$B′A″A′, (AB) ≡ (A′B′). Par

la considération des triangles ABP et A′B′P′ on trouve enfin $\sphericalangle APB \equiv \sphericalangle A'P'B'$. C. q. f. d.

76. Définition. Deux angles dièdres sont dits *congruents* si leurs angles plans sont congruents.

Théorème. *Supposons donnés un angle dièdre* (α, β), *une droite p et un demi-plan* α′ *limité à p; soit* (E) *une des deux moitiés en lesquelles le support de* α′ *divise l'espace. Il existe un semi-plan et un seul* β′, *limité par la droite p, situé dans* (E), *tel que l'angle dièdre* (α, β) *soit congruent à l'angle dièdre* (α′, β′).

77. Définition. Lorsque l'angle plan d'un angle dièdre est droit, cet angle dièdre lui-même est dit *droit*. Lorsqu'un angle dièdre (α, β) est droit, les trois autres angles dièdres formés par les supports de α et β sont aussi droits; on dit alors que ces deux plans sont *perpendiculaires*. Deux demi-plans sont dits perpendiculaires lorsque leurs supports sont perpendiculaires; un demi-plan est dit perpendiculaire à un plan lorsque le support du demi-plan est perpendiculaire au plan.

On démontre sans la moindre difficulté les théorèmes suivants.

Théorème. *Si une droite donnée est perpendiculaire à un plan donné, tout plan passant par la droite donnée est perpendiculaire au plan donné.*

Théorème. *Si en un point de l'intersection de deux plans perpendiculaires on élève dans l'un d'eux la perpendiculaire à l'intersection, cette perpendiculaire est normale à l'autre plan*

Théorème. *Si en un point de l'intersection de deux plans perpendiculaires on élève la perpendiculaire à l'un deux, cette perpendiculaire est dans l'autre.*

Théorème. *Si un plan* α *est perpendiculaire à deux autres plans* β *et* γ, *et si les trois plans ont un point commun,* α *est perpendiculaire à l'intersection de* β *et de* γ.

CHAPITRE IV.

Mesure des segments et des angles.

78. Définition. Étant donnée une suite de segments $(A_1A'_1)$ $(A_2A'_2)$, ... $(A_nA'_n)$, (BD) en nombre fini, ces segments étant tout à fait quelconques, plusieurs d'entre eux pouvant par exemple coïncider ou appartenir à la même droite, nous écrirons

$$(BD)_B \equiv (A_1A'_1) + (A_2A'_2) + \cdots + (A_nA'_n)$$
$$\text{ou } (A_1A'_1) + (A_2A'_2) + \cdots + (A_nA'_n) \equiv (BD)_B$$

s'il existe un point C_1 entre B et D tel que $(BC_1) \equiv (A_1A'_1)$, un point C_2 entre C_1 et D tel que $(C_1C_2) \equiv (A_2A'_2)$, etc., et enfin un point C_{n-1} entre C_{n-2} et D tel que $(C_{n-2}C_{n-1}) \equiv (A_{n-1}A'_{n-1})$ et $(C_{n-1}D) \equiv (A_nA'_n)$.

On voit, en tenant compte du § 42, que *si* $(BD)_B \equiv \Sigma(AA')$, *on a aussi* $(BD)_D \equiv \Sigma(AA')$. C'est pourquoi nous écrirons simplement

$$(BD) \equiv (A_1A'_1) + (A_2A'_2) + \cdots + (A_nA'_n),$$

et nous dirons que (BD) est congruent à la *somme* des segments $(A_1A'_1)$, $(A_2A'_2)$, .., $(A_nA'_n)$.

79. Théorème. *Si l'on a la relation* $(BD) \equiv \Sigma(AA')$, *on peut y remplacer chacun des segments* (BD), $(A_1A'_1)$, ..., $(A_nA'_n)$ *par un segment congruent, sans que la relation soit altérée.*

80. Théorème. *Dans une somme de segments on peut changer arbitrairement l'ordre des termes.*

81. Théorème. *Si l'on a*

$$(BD) \equiv (A_1A'_1) + \cdots + (A_nA'_n),$$
$$(EF) \equiv (C_1C'_1) + \cdots + (C_nC'_n),$$
$$(A_1A'_1) \equiv (C_1C'_1), \quad \ldots, \quad (A_nA'_n) \equiv (C_nC'_n),$$

on a $(BD) \equiv (EF)$.

82. Nous ne savons pas encore si, étant donnée une suite de segments, on pourra toujours trouver un segment congruent à leur somme; plus tard nous résoudrons complètement cette question. Pour le moment, nous pouvous affirmer ce qui suit.

THÉORÈME. *S'il existe un segment congruent à la somme de n segments, il existe un segment congruent à la somme de m ($m < n$) segments choisis d'une façon quelconque parmi les n premiers segments.*

83. THÉORÈME. *Dans une somme de segments, on peut remplacer une suite de termes par un terme unique congruent à leur somme, et l'on peut remplacer un terme par une suite de termes dont la somme lui est congruente.*

84. NOTATION. Supposons donnée une suite de n segments $(A_1A'_1)$, $(A_2A'_2)$, ..., $(A_nA'_n)$; supposons que nous sachions qu'il existe un segment congruent à leur somme; alors nous désignerons par l'expression $((A_1A'_1)+\cdots+(A_nA'_n))$ un segment quelconque congruent à la somme des segments écrits entre parenthèses. S'il n'y a pas d'ambiguité à craindre, nous écrirons aussi $(A_1A'_1)+\cdots+(A_nA'_n)$, en omettant les parenthèses

Quand l'expression $((A_1A'_1)+\cdots+(A_nA'_n))$ a un sens, tous les segments représentés par cette expression sont congruents entre eux; si dans $((A_1A'_1)+\cdots+(A_nA'_n))$ on remplace certains des segments $(A_1A'_1)$, .., $(A_nA'_n)$ par des segments qui leur sont congruents, les segments représentés par la nouvelle expression ainsi obtenue sont les mêmes que ceux représentés par l'expression primitive (§§ 79 et 81).

85. DÉFINITION. Nous écrirons $(AB)\equiv(CD)-(EF)$ et nous dirons que (AB) est congruent à la *différence* de (CD) et de (EF) si l'on a $(CD)\equiv(AB)+(EF)$.

86. THÉORÈME. *Si l'on a la relation* $(AB)\equiv(CD)-(EF)$, *on a* $(EF)\equiv(CD)-(AB)$; *on peut de plus remplacer chacun des segments* (AB), (CD) *et* (EF) *par un segment congruent sans que la relation soit altérée.*

DÉMONSTRATION Ce théorème résulte des §§ 79 et 80

87. Théorème. *Si l'on a*

$$(AB) \equiv (CD) - (EF), \quad (A'B') \equiv (C'D') - (E'F'),$$
$$(CD) \equiv (C'D'), \quad (EF) \equiv (E'F'),$$

on a $(AB) \equiv (A'B')$.

88. Théorème. *Si l'on a* $(AB) \equiv (CD) - (EF)$, *on a* $(CD) > (EF)$.

89. Théorème. *Si* $(CD) > (EF)$, *il existe un segment* (AB) *tel que* $(AB) \equiv (CD) - (EF)$; *si* (CD) *et* (EF) *ne sont pas congruents, ou bien il existe un segment congruent à* $(CD) - (EF)$, *ou bien il y a un segment congruent à* $(EF) - (CD)$.

90. Notations. Si $(CD) > (EF)$, nous désignerons par $((CD) - (EF))$ un segment quelconque congruent à $(CD) - (EF)$ (voir § 89). Si (CD) et (EF) ne sont pas congruents, nous désignerons indifféremment par $|(CD) - (EF)|$ ou $|(EF) - (CD)|$ n'importe quel segment représenté par celle des deux expressions $((CD) - (EF))$ et $((EF) - (CD))$ qui a un sens.

Si l'expression $((CD) - (EF))$ a un sens, tous les segments représentés par cette expression sont congruents entre eux; si l'expression $|(CD) - (EF)|$ a un sens, tous les segments représentés par cette expression sont congruents entre eux; si dans $((CD) - (EF))$ ou dans $|(CD) - (EF)|$ on remplace (CD) ou (EF) par un segment congruent, les segments représentés par la nouvelle expression ainsi obtenue sont les mêmes que ceux représentés par l'expression primitive.

91. Théorème. *Si l'on a*

$$(AB) \equiv (CD) + (EF), \ (A'B') \equiv (C'D') + (EF), \ (CD) > (C'D'),$$

on a $(AB) > (A'B')$.

Si l'on a

$$(AB) \equiv (CD) - (EF), \ (A'B') \equiv (C'D') - (EF), \ (CD) > (C'D'),$$

on a $(AB) > (A'B')$.

Si l'on a

$$(AB) \equiv (CD) - (EF), \quad (A'B') \equiv (CD) - (E'F'),$$
$$(E'F') > (EF),$$

on a $(AB) > (A'B')$.

92. Théorème. *Etant donnés un segment* (AB) *et un point* A_1 *situé entre* A *et* B, *il existe une suite de points en nombre fini* A_1, A_2, A_3, A_4, ..., A_{n-1}, *comprenant au moins un point, jouissant de la propriété suivante:* A_2 *est entre* A_1 *et* B, A_3 *entre* A_2 *et* B, A_4 *entre* A_3 *et* B, *etc.,* A_{n-1} *entre* A_{n-2} *et* B ; *les segments* (AA_1), (A_1A_2), (A_2A_3), (A_3A_4), ..., $(A_{n-2}A_{n-1})$ *sont congruents entre eux;* $(A_{n-1}B)$ *est congruent ou inférieur à* (AA_1) (1).

Démonstration. Si (A_1B) est congruent ou inférieur à (AA_1), le théorème est établi. Si $(A_1B) > (AA_1)$, il y a un point A_2 entre A_1 et B tel que $(A_1A_2) \equiv (AA_1)$. Si (A_2B) est congruent ou inférieur à (AA_1), le théorème est établi. Si $(A_2B) > (AA_1)$, il y a un point A_3 entre A_2 et B tel que $(A_2A_3) \equiv (AA_1)$. En continuant ainsi indéfiniment, ou bien on arrivera à un point A_{n-1} tel que $(A_{n-1}B)$ soit congruent ou inférieur à (AA_1), ou bien on n'arrivera jamais à un tel point; si la première alternative se présente, le théorème est démontré. Plaçons-nous dans la seconde alternative.

A tout nombre entier *n* supérieur ou égal à 2 répond un point A_{n-1} situé entre A et B et défini de la manière indiquée. Divisons les points de (AB) en deux classes, la première classe comprenant le point A et les points X tels qu'il existe un nombre *n* pour lequel X soit entre A et A_{n-1}, la deuxième classe comprenant B et les points Y tels que Y ne soit jamais entre A et A_{n-1}. On voit aisément que chacune des deux classes contient plus d'un point et que si X appartient à la première classe et Y à la seconde, X est entre A et Y. D'après le postulat de la continuité il y a donc un point C entre A et B tel que tout point situé entre A et C appartienne à la première classe et tout point situé entre C et B à la seconde

Il y a un point C_1 entre A et C tel que $(CC_1) \equiv (AA_1)$. C_1 appartient à la première classe. Il existe une valeur n' de *n* telle que C_1 est entre A et $A_{n'-1}$. $A_{n'-1}$ est entre A

(1) Ce théorème est quelquefois pris comme postulat sous le nom de postulat d'Archimède.

et le point $A_{n'}$ qu'on obtient pour $n = n' + 1$. On a

$$(C_1A_{n'}) \equiv (C_1A_{n'-1}) + (A_{n'-1}A_{n'}) > (A_{n'-1}A_{n'}) \equiv (CC_1).$$

$A_{n'}$ et C sont du même côté de C_1; donc, C est entre C_1 et $A_{n'}$, C est entre A et $A_{n'}$. De là il résulte que $A_{n'}$ est entre C et B. Un point situé entre C et $A_{n'}$ est d'une part entre A et $A_{n'}$ et d'autre part entre C et B, c. à. d qu'il appartient à la seconde classe. Nous arrivons donc à une contradiction, la seconde alternative doit être rejetée et le théorème est établi.

93. Notation Soient (AB) un segment et m un nombre entier et positif; supposons d'abord $m > 1$; supposons qu'il existe un segment congruent à la somme de m segments congruents à (AB). Alors nous désignerons par m (AB) un segment quelconque qui est congruent à la somme de m segments congruents à (AB). Si $m = 1$, nous désignerons par m(AB), c. à. d. 1(AB), tout segment congruent à (AB)

Si l'expression m (AB) a un sens, tous les segments représentés par cette expression sont congruents entre eux (§ 81); si de plus on a $(A'B') \equiv (AB)$, les segments représentés par $m(A'B')$ sont les mêmes que ceux représentés par m (AB).

94. Théorème. *Supposons que* m(AB) *et* $m(A'B')$ *existent; si* $(AB) > (A'B')$, *on a* $m(AB) > m(A'B')$; *si* $m(AB) \equiv m(A'B')$, *on a* $(AB) \equiv (A'B')$; *si* $m(AB) > m(A'B')$, *on a* $(AB) > (A'B')$ *(m désigne un nombre entier et positif).*

Démonstration La première partie du théorème résulte du § 91. La deuxième et la troisième partie se démontrent par l'absurde.

95. Notation. Soient (AB) un segment et m un nombre entier et positif; supposons qu'il existe un segment (CD) tel que $m(CD) \equiv (AB)$. Alors nous désignerons par $\frac{1}{m}$(AB) un segment quelconque $(C'D')$ tel que $m(C'D') \equiv (AB)$.

Si l'expression $\frac{1}{m}$(AB) a un sens, tous les segments

représentés par cette expression sont congruents entre eux ; si de plus $(A'B') \equiv (AB)$, les segments représentés par $\frac{1}{m}(A'B')$ sont les mêmes que ceux représentés par $\frac{1}{m}(AB)$ (§ 94).

96. Théorème. *Supposons que* $m(AB)$ *et* $m'(AB)$ *existent; si l'on a* $m > m'$, *on a* $m(AB) > m'(AB)$; *si l'on a* $m(AB) \equiv m'(AB)$, *on a* $m = m'$; *si l'on a* $m(AB) > m'(AB)$, *on a* $m > m'$ *(m et m' désignent des nombres entiers et positifs).*

Démonstration. Supposons qu'on ait $(CD) \equiv (AB) + (AB)$; on a alors $(CD) > (AB)$ (§ 48), c. à. d. que $2(AB) > (AB)$. Cela étant, on démontre facilement de proche en proche la première partie du théorème. La deuxième et la troisième partie se démontrent immédiatement par l'absurde.

97. Théorème. *Si* $m((A_1A'_1) + \cdots + (A_nA'_n))$ *existe, alors* $m(A_1A'_1) + \cdots + m(A_nA'_n)$ *existe, et réciproquement, et l'on a* $m((A_1A'_1) + \cdots + (A_nA'_n)) \equiv m(A_1A'_1) + \cdots + m(A_nA'_n)$. *m désigne un nombre entier et positif.*

Démonstration. Supposons d'abord que $m((A_1A'_1) + \cdots + (A_nA'_n))$ existe; $m((A_1A'_1) + \cdots + (A_nA'_n))$ est congruent à une somme de m termes congruents à $((A_1A'_1) + \cdots + (A_nA'_n))$ (§ 93). Supprimons dans cette somme les parenthèses (§ 83). Dans la somme obtenue, il y a m termes identiques à $(A_1A'_1)$, . ., m termes identiques à $(A_nA'_n)$ Donc, $m(A_1A'_1)$, . ., $m(A_nA'_n)$ existent (§ 82). On a en outre, en groupant ensemble les $(A_1A'_1)$, . ., les $(A_nA'_n)$ (§ 83),

$$m((A_1A'_1) + \cdots + (A_nA'_n)) \equiv m(A_1A'_1) + \cdots + m(A_nA'_n).$$

On raisonne de la même façon, mais en sens inverse, quand on part de $m(A_1A'_1) + \cdots + m(A_nA'_n)$.

98. Théorème. *Si* $m(AB)$ *existe et si* $m' < m$, $m'(AB)$ *existe; si* $(A'B') < (AB)$, $m(A'B')$ *existe (m et m' désignent des nombres entiers et positifs).*

Démonstration. La première partie du théorème résulte du § 82. Posons, pour établir la seconde partie,

$(AB) \equiv (A'B') + (CD)$ (§ 89). Comme $m\,((A'B') + (CD))$ existe, $m\,(A'B')$ existe (§ 97).

99. Théorème. *Si* $(AB) + ((CD) - (EF))$ *et* $((AB) + (CD))$ *existent,* $((AB) + (CD)) - (EF)$ *existe et l'on a* $(AB) + ((CD) - (EF)) \equiv ((AB) + (CD)) - (EF)$.

Démonstration. On a

$$((CD) - (EF)) + (EF) \equiv (CD) \quad (§ 85)$$
$$(AB) + (CD) \equiv (AB) + [((CD) - (EF)) + (EF)] \quad (§ 84)$$
$$(AB) + (CD) \equiv [(AB) + ((CD) - (EF))] + (EF) \quad (§ 83)$$
$$((AB) + (CD)) - (EF) \equiv (AB) + ((CD) - (EF)) \quad (§ 85).$$

C. q. f. d.

100. Théorème. *Si* $(AB) - ((CD) + (EF))$ *existe,* $((AB) - (CD)) - (EF)$ *existe, et réciproquement, et l'on a* $(AB) - ((CD) + (EF)) \equiv ((AB) - (CD)) - (EF)$.

Démonstration. Supposons que $((AB) - (CD)) - (EF)$ existe. On a

$$[((AB) - (CD)) - (EF)] + (EF) \equiv ((AB) - (CD))$$
$$((AB) - (CD)) + (CD) \equiv (AB)$$
$$(AB) \equiv [((AB) - (CD)) - (EF)] + (EF) + (CD)$$
$$(AB) \equiv [((AB) - (CD)) - (EF)] + ((CD) + (EF)).$$

Si $(AB) - ((CD) + (EF))$ existe, on a

$$[(AB) - ((CD) + (EF))] + ((CD) + (EF)) \equiv (AB)$$
$$[(AB) - ((CD) + (EF))] + (EF) \equiv ((AB) - (CD))$$
$$[(AB) - ((CD) + (EF))] \equiv ((AB) - (CD)) - (EF).$$

101. Théorème. *Si* $((CD) - (EF))$ *et* $((AB) - (CD))$ *existent,* $(AB) - ((CD) - (EF))$ *et* $((AB) - (CD)) + (EF)$ *existent et l'on a* $(AB) - ((CD) - (EF)) \equiv ((AB) - (CD)) + (EF)$.

Démonstration. On a

$$(AB) \equiv ((AB) - (CD)) + (CD)$$
$$(CD) \equiv ((CD) - (EF)) + (EF)$$
$$(AB) \equiv ((AB) - (CD)) + ((CD) - (EF)) + (EF)$$
$$(AB) - ((CD) - (EF)) \equiv ((AB) - (CD)) + (EF).$$

C. q. f. d.

102 Théorème. *Si* $m\,((AB) - (CD))$, $m\,(AB)$ *et* $m\,(CD)$ *existent, alors* $m\,(AB) - m\,(CD)$ *existe et réciproquement,*

et l'on a $m((AB) - (CD)) \equiv m(AB) - m(CD)$. *Le théorème est aussi valable pour* $|(AB) - (CD)|$. *(m désigne un nombre entier positif).*

Démonstration. Démontrons le théorème pour $m = 2$; supposons l'existence de $2((AB)-(CD))$, $2(AB)$ et $2(CD)$. On a $2((AB)-(CD)) \equiv ((AB)-(CD)) + ((AB)-(CD))$ (§ 93) $\equiv [((AB)-(CD)) + (AB)] - (CD)$ (§ 99) $\equiv [((AB)+(AB)) - (CD)] - (CD) \equiv (2(AB)-(CD)) - (CD) \equiv 2(AB) - 2(CD)$ (§ 100). Cela étant, on démontre facilement le théorème dans le cas où l'on suppose l'existence de $2(AB) - 2(CD)$; ensuite on l'étend aisément aux valeurs entières et positives de m supérieures à 2.

Enfin, pour montrer que le théorème est valable pour $|(AB) - (CD)|$, il suffit de distinguer les deux cas $(AB) > (CD)$ et $(CD) > (AB)$.

103. Théorème. *Soient* $m_1, m_2, \ldots, m_n$ *des nombres entiers et positifs. Si* $(m_1 + \cdots + m_n)(AB)$ *existe,* $m_1(AB) + \cdots + m_n(AB)$ *existe et réciproquement, et l'on a* $(m_1 + \cdots + m_n)(AB) \equiv m_1(AB) + \cdots + m_n(AB)$. *Si* $m_1 > m_2$ *et si* $(m_1 - m_2)(AB)$, $m_1(AB)$ *et* $m_2(AB)$ *existent, alors* $m_1(AB) - m_2(AB)$ *existe et réciproquement, et l'on a* $(m_1 - m_2)(AB) \equiv m_1(AB) - m_2(AB)$.

104. Théorème. *Etant donnés un nombre entier et positif k et un segment* (AB), *il existe toujours un segment* $\frac{1}{2^k}(AB)$.

Démonstration. Ce théorème résulte du § 55.

105 Théorème. *Etant donnés un nombre entier et positif m et un segment* (AB), *on peut trouver un segment* (CD) *tel que m* (CD) *existe et soit inférieur à* (AB).

Démonstration. On peut trouver un nombre entier et positif k tel que $2^k > m$. $\frac{1}{2^k}(AB)$ existe (§ 104). On a

$$2^k\left(\frac{1}{2^k}(AB)\right) \equiv (AB).$$

Donc,

$$m\left(\frac{1}{2^k}(AB)\right)$$

existe (§ 98), et l'on a

$$m\left(\frac{1}{2^k}(AB)\right) < (AB) \text{ (§ 96).}$$

106 Théorème. *Etant donnés un nombre entier et positif n et un segment* (AB), *il existe toujours un segment* $\frac{1}{n}$(AB).

Démonstration. Si $n = 1$, le théorème est évident ; supposons $n > 1$. Etant donné un point quelconque C_1 situé entre A et B, on peut trouver un nombre entier et positif k jouissant de la propriété suivante : $k(AC_1)$ existe, on a $k(AC_1) \equiv (AB)$ ou bien $k(AC_1) < (AB)$, et dans le dernier cas $(AC_1) > (AB) - k(AC_1)$ (§ 92). Soit k' un nombre entier et positif inférieur à k (si $k \neq 1$); posons $k = k' + k'_1$; si $k(AC_1) \equiv (AB)$, on a $k'(AC_1) + k'_1(AC_1) \equiv (AB)$ (§ 103), $(AB) - k'(AC_1) \equiv k'_1(AC_1)$; donc $(AB) - k'(AC_1)$ est supérieur ou congruent à (AC_1); si $k(AC_1) < (AB)$, on a $(AB) - k'(AC_1) \equiv (AB) - (k - k'_1)(AC_1) \equiv (AB) - (k(AC_1) - k'_1(AC_1)) \equiv ((AB) - k(AC_1)) + k'_1(AC_1)$, segment qui est supérieur à (AC_1). Soit k'' un nombre entier et positif supérieur à k; si $k''(AC_1)$ existe, $(k+1)(AC_1)$ existe; on a $(k+1)(AC_1) \equiv k(AC_1) + (AC_1) > (AB)$, et aussi $k''(AC_1) > (AB)$. De tout cela il résulte que pour chaque point C_1 le nombre k est parfaitement déterminé.

Il y a des points C_1 pour lesquels on a $k \geqq n$ (§ 105) et d'autres pour lesquels on a $k < n$ (§ 55).

Prenons entre A et B deux points C'_1 et C''_1 tels que C'_1 soit entre A et C''_1. Soient k' et k'' les valeurs de k répondant à C'_1 et C''_1. On a $k''(AC'_1) < k''(AC''_1)$ et donc $k''(AC'_1) < (AB)$. Donc, $k' \geqq k''$. Il en résulte qu'étant donnés un point C_1 pour lequel on a $k \geqq n$ et un autre pour lequel on a $k < n$, le premier est entre A et le second.

Divisons maintenant les points de (AB) en deux classes, la première comprenant A et les points C_1 pour lesquels $k \geqq n$, la seconde comprenant B et les points C_1 pour lesquels $k < n$. Il y a un point P_1 situé entre A et B tel

que tout point situé entre A et P_1 appartienne à la première classe et tout point entre P_1 et B à la seconde (postulat IV, § 10).

Soit m la valeur de k qui répond à P_1. Je dis qu'on a $m = n$ et $n(AP_1) \equiv (AB)$; en effet.

Supposons $m < n$. Soit P'_1 un point situé entre A et P_1. Admettons pour fixer les idées qu'on ait $m(AP_1) < (AB)$. On a $m(AP'_1) < m(AP_1)$ et donc $m(AP'_1) < (AB)$. On a

$$\begin{aligned}(AB) - m(AP'_1) &\equiv (AB) - m((AP_1) - (P'_1P_1)) \\ &\equiv (AB) - (m(AP_1) - m(P'_1P_1)) \text{ (§ 102)} \\ &\equiv ((AB) - m(AP_1)) + m(P'_1P_1) \text{ (§ 101)}.\end{aligned}$$

On a $(AP_1) > AB - m(AP_1)$; il y a un point D entre A et P_1 tel que $(AD) \equiv (AB) - m(AP_1)$. Nous aurons

$$(AB) - m(AP'_1) \equiv (AD) + m(P'_1P_1).$$

Prenons P'_1 entre D et P_1 tel que $(m+1)(P'_1P_1) < (DP_1)$ (§ 105). On aura alors

$$\begin{gathered}(AP'_1) \equiv (AD) + (DP'_1) \equiv (AD) + ((DP_1) - (P'_1P_1)) \\ (DP_1) - (P_1P'_1) > (m+1)(P'_1P_1) - (P'_1P_1) \text{ (§ 91)} \\ (DP_1) - (P'_1P_1) > m(P'_1P_1) \\ (AP'_1) > (AD) + m(P'_1P_1) \\ (AP'_1) > (AB) - m(AP'_1).\end{gathered}$$

Donc, la valeur de k répondant à P'_1 est aussi m, ce qui est impossible, puisque P'_1 appartient à la première classe. Dans le cas où l'on a $m(AP_1) \equiv (AB)$, le raisonnement que nous venons de faire reste valable moyennant une petite modification qui n'offre pas la moindre difficulté.

Supposons $m > n$. On a $(m-1)(AP_1) < (AB), m-1 \geqq n$. Prenons un point P'_1 entre P_1 et B tel que $(m-1)(P_1P'_1) < (AB) - (m-1)(AP_1)$ (§ 105). $[(AB) - (m-1)(AP_1)] + (m-1)(AP_1)$ existe, donc $(m-1)(P_1P'_1) + (m-1)(AP_1)$ existe et l'on a

$$\begin{gathered}(m-1)(P_1P'_1) + (m-1)(AP_1) < [(AB) - (m-1)(AP_1)] \\ + (m-1)(AP_1) \\ (m-1)((P_1P'_1) + (AP_1)) < (AB) \\ (m-1)(AP'_1) < (AB).\end{gathered}$$

Donc, la valeur de k qui répond à P'_1 est supérieure ou égale à $m - 1$ et aussi supérieure ou égale à n, ce qui est impossible puisque P'_1 appartient à la seconde classe.

On a donc $m = n$. Supposons maintenant qu'on ait $n(AP_1) < (AB)$. On montre, en raisonnant exactement comme nous venons de le faire pour montrer qu'on ne peut pas avoir $m > n$, qu'il y a un point P'_1 entre P_1 et B pour lequel on a $k \geqslant n$. Or, cela est impossible. On a donc $n(AP_1) \equiv (AB)$. C. q. f. d.

Remarque. On peut trouver entre A et B $n - 1$ points $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ tels que P_2 soit entre P_1 et B, etc., P_{n-1} entre P_{n-2} et B et tels que $(AP_1) \equiv (P_1P_2) \equiv \cdots \equiv (P_{n-1}B)$. Pour chaque suite de points $P_1, \ldots, P_{n-1}$ jouissant de cette propriété, on aura $(AP_1) \equiv \frac{1}{n}(AB)$ Comme tous les segments représentés par $\frac{1}{n}(AB)$ sont congruents entre eux (§ 95), la suite de points $P_1, \ldots, P_{n-1}$ est unique ; par conséquent, on peut diviser un segment donné d'une seule manière en n parties congruentes entre elles.

107. Théorème. *Etant donnés deux segments* (AB) *et* (CD), *on peut toujours trouver un nombre entier et positif* n *tel que* $\frac{1}{n}(AB) < (CD)$.

Démonstration. Si $(CD) > (AB)$ il suffit de prendre $n = 1$. Si $(CD) \equiv (AB)$, il suffit de prendre $n = 2$. Supposons $(AB) > (CD)$. Soit m le nombre entier et positif pour lequel on a $m(CD) \equiv (AB)$ ou bien $m(CD) < (AB)$, et dans le dernier cas $(CD) > (AB) - m(CD)$ (§ 106, démonstration). On n'a pas $\frac{1}{m+1}(AB) > (CD)$, ni $\frac{1}{m+1}(AB) \equiv (CD)$ (§ 106, démonstration); donc, $\frac{1}{m+1}(AB) < (CD)$ et l'on peut prendre $n = m + 1$. C. q. f. d.

108. Théorème. *Si* $m > m'$, $\frac{1}{m}(AB) < \frac{1}{m'}(AB)$; *si* $\frac{1}{m}(AB) \equiv \frac{1}{m'}(AB)$, $m = m'$; *si* $\frac{1}{m}(AB) < \frac{1}{m'}(AB)$, $m > m'$ (*m et m' désignent des nombres entiers et positifs*).

DÉMONSTRATION. On a

$$m\left(\frac{1}{m}(AB)\right) \equiv (AB), \quad m'\left(\frac{1}{m'}(AB)\right) \equiv (AB).$$

Si l'on avait $\frac{1}{m}(AB) \equiv \frac{1}{m'}(AB)$, on aurait $m = m'$ (§ 96).

Si l'on avait $\frac{1}{m}(AB) > \frac{1}{m'}(AB)$, on aurait $(AB) > (AB)$ (§§ 94 et 96). On a donc $\frac{1}{m}(AB) < \frac{1}{m'}(AB)$, et la première partie du théorème est établie. La deuxième et la troisième partie se démontrent immédiatement par l'absurde.

109. THÉORÈME. *Si $m(n(AB))$ existe (m et n sont des nombres entiers et positifs), alors $(mn)(AB)$ existe, et réciproquement, et l'on a $m(n(AB)) \equiv (mn)(AB)$. Si m et n sont des nombres entiers et positifs, on a toujours*

$$\frac{1}{m}\left(\frac{1}{n}(AB)\right) \equiv \frac{1}{mn}(AB).$$

DÉMONSTRATION. La première partie du théorème résulte directement du § 103. Ensuite on a

$$(mn)\left(\frac{1}{mn}(AB)\right) \equiv (AB) \quad (\S\ 95),$$

$$(mn)\left(\frac{1}{mn}(AB)\right) \equiv n\left[m\left(\frac{1}{mn}(AB)\right)\right] \text{ (1}^{e}\text{ partie du théorème)},$$

$$n\left[m\left(\frac{1}{mn}(AB)\right)\right] \equiv (AB),$$

$$m\left(\frac{1}{mn}(AB)\right) \equiv \frac{1}{n}(AB) \quad (\S\ 95),$$

$$\frac{1}{mn}(AB) \equiv \frac{1}{m}\left(\frac{1}{n}(AB)\right) \quad (\S\ 95). \qquad \text{C. q. f. d.}$$

110. THÉORÈME. *Si m est un nombre entier et positif et si $((A_1A'_1)+\cdots+(A_nA'_n))$ existe, on a $\frac{1}{m}((A_1A'_1)+\cdots+(A_nA'_n)) \equiv \frac{1}{m}(A_1A'_1)+\cdots+\frac{1}{m}(A_nA'_n)$; si $((AB)-(CD))$ existe, on a $\frac{1}{m}((AB)-(CD)) \equiv \frac{1}{m}(AB) - \frac{1}{m}(CD)$; $|(AB)-(CD)|$ jouit de la même propriété.*

Démonstration. Ce théorème résulte des §§ 97 et 102.

111. Définition. Soient m un nombre rationnel positif et (AB) un segment. Si m est entier ou l'inverse d'un nombre entier, nous savons déjà ce que signifie m(AB) (§§ 93 et 95). Supposons maintenant que m ne soit ni un entier ni l'inverse d'un entier. On peut réduire m à la forme $\frac{p}{q}$, où p et q sont des nombres entiers positifs supérieurs à 1 et premiers entre eux; p et q sont déterminés quand m est donné. On sait que $\frac{1}{q}$(AB) existe toujours (§ 106). Supposons que $p\left(\frac{1}{q}(AB)\right)$ existe. On désigne par m(AB) l'un quelconque des segments représentés par $p\left(\frac{1}{q}(AB)\right)$. Tous les segments représentés par m(AB) sont congruents entre eux; si (A'B') est un segment congruent à (AB), les segments représentés par m(A'B') sont les mêmes que ceux représentés par m(AB).

Si l'on a (CD) $\equiv m$(AB), m étant un nombre rationnel positif, on dit que (CD) a pour *mesure* m avec (AB) comme unité.

112. Théorème. *Si p et q sont des nombres entiers et positifs et si p(AB) existe, alors $p\left(\frac{1}{q}(AB)\right)$ existe et l'on a* $p\left(\frac{1}{q}(AB)\right) \equiv \frac{1}{q}\left(p(AB)\right)$.

Démonstration. On a $\frac{1}{q}(AB) < (AB)$ (§ 108), donc $p\left(\frac{1}{q}(AB)\right)$ existe (§ 98). On a maintenant

$$p(AB) \equiv p\left[q\left(\frac{1}{q}(AB)\right)\right] \equiv (pq)\left(\frac{1}{q}(AB)\right) \quad (\S\ 109)$$

$$\equiv q\left[p\left(\frac{1}{q}(AB)\right)\right] \quad (\S\ 109); \quad p\left(\frac{1}{q}(AB)\right) \equiv \frac{1}{q}(p(AB)).$$

C. q. f. d.

113. Théorème. *Soient m un nombre rationnel positif, p' et q' deux nombres entiers et positifs tels que $m = \frac{p'}{q'}$; si*

m(AB) existe, $p'\left(\frac{1}{q'}(\mathrm{AB})\right)$ existe et réciproquement; de plus on a $m(\mathrm{AB}) \equiv p'\left(\frac{1}{q'}(\mathrm{AB})\right)$.

Démonstration. Soient p et q les deux nombres entiers positifs et premiers entre eux tels que $\frac{p}{q} = m$. Il y a un nombre entier positif n tel que $p' = np$ et $q' = nq$. Supposons que m(AB) existe. On a

$$m(\mathrm{AB}) \equiv p\left(\frac{1}{q}(\mathrm{AB})\right) (\S\ 111) \equiv p \left\{ n\left[\frac{1}{n}\left(\frac{1}{q}(\mathrm{AB})\right)\right]\right\}$$
$$\equiv p\left[n\left(\frac{1}{q'}(\mathrm{AB})\right)\right] (\S\ 109) \equiv p'\left(\frac{1}{q'}(\mathrm{AB})\right) (\S\ 109).$$

Si l'on suppose que $p'\left(\frac{1}{q'}(\mathrm{AB})\right)$ existe, on arrive à m(AB) en effectuant exactement les mêmes transformations en sens inverse. C. q. f. d.

114. Théorème. *Soient m et m' deux nombres rationnels positifs; supposons que m(AB) et m'(A′B′) existent. Moyennant les hypothèses placées ci-dessous on aura les congruences ou inégalités placées en regard.*

	Hypothèses.	Conséquences.	
$m = m'$	(AB) > (A′B′)	m(AB) > m'(A′B′)	(1)
	m(AB) ≡ m'(A′B′)	(AB) ≡ (A′B′)	(2)
	m(AB) > m'(A′B′)	(AB) > (A′B′)	(3)
(AB) ≡ (A′B′)	$m > m'$	m(AB) > m'(A′B′)	(4)
	m(AB) ≡ m'(A′B′)	$m = m'$	(5)
	m(AB) > m'(A′B′)	$m > m'$	(6)

Démonstration. (1), (2), (3) se démontrent immédiatement; pour démontrer (4), il suffit de réduire m et m' au même dénominateur; (5) et (6) se démontrent immédiatement par l'absurde.

115. Théorème. *Si m(AB) existe et si $m' < m$, m'(AB) existe; si (A′B′) < (AB), m(A′B′) existe (m et m' désignent des nombres rationnels positifs).*

116. Théorème. *Etant donnés deux segments (AB) et (EF), tels que (AB) < (EF), et un segment (UV), on peut*

trouver un nombre rationnel positif m *tel que* $m(\mathrm{UV})$ *existe et que* $(\mathrm{AB}) < m(\mathrm{UV}) < (\mathrm{EF})$.

DÉMONSTRATION. On peut trouver (§ 107) un nombre entier et positif q tel qu'on ait

$$\frac{1}{q}(\mathrm{UV}) < (\mathrm{AB}), \quad \frac{1}{q}(\mathrm{UV}) < (\mathrm{EF}) - (\mathrm{AB}).$$

Il y a un nombre entier et positif p tel qu'on ait $p\left(\frac{1}{q}(\mathrm{UV})\right) \equiv (\mathrm{AB})$ ou bien $p\left(\frac{1}{q}(\mathrm{UV})\right) < (\mathrm{AB})$ et dans ce dernier cas $(\mathrm{AB}) - p\left(\frac{1}{q}(\mathrm{UV})\right) < \frac{1}{q}(\mathrm{UV})$. $(\mathrm{AB}) + ((\mathrm{EF}) - (\mathrm{AB}))$ existe ; donc $(\mathrm{AB}) + \frac{1}{q}(\mathrm{UV})$ existe et $p\left(\frac{1}{q}(\mathrm{UV})\right) + \frac{1}{q}(\mathrm{UV})$ ou $(p+1)\left(\frac{1}{q}(\mathrm{UV})\right)$ existe. On a $(p+1)\left(\frac{1}{q}(\mathrm{UV})\right) < (\mathrm{AB}) + ((\mathrm{EF}) - (\mathrm{AB}))$ ou $< (\mathrm{EF})$; si $p\left(\frac{1}{q}(\mathrm{UV})\right) \equiv (\mathrm{AB})$, on a $(p+1)\left(\frac{1}{q}(\mathrm{UV})\right) > p\left(\frac{1}{q}(\mathrm{UV})\right)$ ou $> (\mathrm{AB})$; si $(\mathrm{AB}) > p\left(\frac{1}{q}(\mathrm{UV})\right)$, on a $(\mathrm{AB}) \equiv p\left(\frac{1}{q}(\mathrm{UV})\right) + \left[(\mathrm{AB}) - p\left(\frac{1}{q}(\mathrm{UV})\right)\right]$; comme $(\mathrm{AB}) - p\left(\frac{1}{q}(\mathrm{UV})\right) < \frac{1}{q}(\mathrm{UV})$, on a $p\left(\frac{1}{q}(\mathrm{UV})\right) + \frac{1}{q}(\mathrm{UV}) > (\mathrm{AB})$, c. à d. $(p+1)\left(\frac{1}{q}(\mathrm{UV})\right) > (\mathrm{AB})$. Il suffit donc de prendre $m = \frac{p+1}{q}$ (§ 113).

117. THÉORÈME. *Soit* m *un nombre rationnel positif; si* $m((\mathrm{A}_1\mathrm{A}'_1) + \cdots + (\mathrm{A}_n\mathrm{A}'_n))$ *existe, alors* $m(\mathrm{A}_1\mathrm{A}'_1) + \cdots + m(\mathrm{A}_n\mathrm{A}'_n)$ *existe; si* $m(\mathrm{A}_1\mathrm{A}'_1) + \cdots + m(\mathrm{A}_n\mathrm{A}'_n)$ *et* $(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_1') + \cdots + (\mathrm{A}_n\mathrm{A}'_n)$ *existent, alors* $m((\mathrm{A}_1\mathrm{A}'_1) + \cdots + (\mathrm{A}_n\mathrm{A}'_n))$ *existe; on a dans les deux cas* $m((\mathrm{A}_1\mathrm{A}'_1) + \cdots + (\mathrm{A}_n\mathrm{A}'_n)) \equiv m(\mathrm{A}_1\mathrm{A}'_1) + \cdots + m(\mathrm{A}_n\mathrm{A}'_n)$.

118. THÉORÈME. *Si* $m((\mathrm{AB}) - (\mathrm{CD}))$, $m(\mathrm{AB})$ *et* $m(\mathrm{CD})$ *existent (m désignant un nombre rationnel positif), alors* $m(\mathrm{AB}) - m(\mathrm{CD})$ *existe et réciproquement, et l'on a* $m((\mathrm{AB}) - (\mathrm{CD})) \equiv m(\mathrm{AB}) - m(\mathrm{CD})$. *Le théorème est aussi valable pour* $|(\mathrm{AB}) - (\mathrm{CD})|$.

119. THÉORÈME. *Soient $m_1, m_2, \dots, m_n$ des nombres rationnels positifs. Si $(m_1 + \dots + m_n)(AB)$ existe, $m_1(AB) + \dots + m_n(AB)$ existe et réciproquement, et l'on a*

$$(m_1 + \dots + m_n)(AB) \equiv m_1(AB) + \dots + m_n(AB).$$

Si $m_1 > m_2$ et si $(m_1 - m_2)(AB)$, $m_1(AB)$ et $m_2(AB)$ existent, alors $m_1(AB) - m_2(AB)$ existe et réciproquement, et l'on a

$$(m_1 - m_2)(AB) \equiv m_1(AB) - m_2(AB).$$

DÉMONSTRATION. Réduisons $m_1, m_2, \dots, m_n$ au même dénominateur, de sorte qu'on ait $m_1 = \frac{p_1}{q}, \dots, m_n = \frac{p_n}{q}$ ($q, p_1, \dots, p_n$ étant entiers et positifs). On a, en supposant que $(m_1 + \dots + m_n)(AB)$ existe, $(m_1 + \dots + m_n)(AB) \equiv \frac{p_1 + \dots + p_n}{q}(AB)$ $\equiv (p_1 + \dots + p_n)\frac{1}{q}(AB)$ (§ 113) $\equiv p_1\left(\frac{1}{q}(AB)\right) + \dots + p_n\left(\frac{1}{q}(AB)\right)$ (§ 103) $\equiv m_1(AB) + \dots + m_n(AB)$ (113).

On raisonne suivant la même méthode quand on suppose l'existence de $m_1(AB) + \dots + m_n(AB)$ ainsi que pour démontrer la seconde partie du théorème.

120. THÉORÈME. *Supposons* $(AB) \equiv m(UV)$, $(A_1B_1) \equiv m_1(UV)$, $(A_2B_2) \equiv m_2(UV)$ (m, m_1 *et* m_2 *désignant des nombres rationnels positifs*). *Si l'on a* $(AB) \equiv (A_1B_1) + (A_2B_2)$ *ou* $(AB) \equiv (A_1B_1) - (A_2B_2)$, *on a* $m = m_1 + m_2$ *ou* $m = m_1 - m_2$ *et réciproquement*

121. THÉORÈME. *Soient m et m' deux nombres rationnels positifs. Si $m(m'(AB))$ existe, $(mm')(AB)$ existe; si $(mm')(AB)$ et $m'(AB)$ existent, $m(m'(AB))$ existe et l'on a dans les deux cas $m(m'(AB)) \equiv (mm')(AB)$.*

DÉMONSTRATION. Soient $m = \frac{p}{q}$ et $m' = \frac{p'}{q'}$; supposons que $m(m'(AB))$ existe; on a $m(m'(AB)) \equiv p\left\{\frac{1}{q}\left[p'\left(\frac{1}{q'}(AB)\right)\right]\right\}$ $\equiv p\left\{p'\left[\frac{1}{q}\left(\frac{1}{q'}(AB)\right)\right]\right\}$ (§ 112) $\equiv p\left[p'\left(\frac{1}{qq'}(AB)\right)\right]$ (§ 109) $\equiv (pp')\left(\frac{1}{qq'}(AB)\right)$ (§ 109) $\equiv (mm')(AB)$.

Si l'on suppose l'existence de $(mm')(AB)$ et de $m'(AB)$,

on peut faire les mêmes transformations en sens inverse.

122. Théorème. *Si l'on a* (AB) $\equiv m$ (CD) (*m rationnel et positif), on a* (CD) $\equiv \frac{1}{m}$ (AB).

Démonstration. On a

$$(CD) \equiv \left(m \frac{1}{m}\right)(CD) \equiv \frac{1}{m}(m(CD)) \text{ (§ 121) } \equiv \frac{1}{m}(AB).$$

123. Définition. Supposons donnés un segment (AB) et un segment (CD); désignons par r un nombre rationnel positif quelconque. Il y a des nombres r tels que r (AB) existe et que l'on a r(AB) $<$ (CD) (§ 116); il y a aussi des nombres r tels que r(AB) existe et que r(AB) $>$ (CD) (§ 116). Disons qu'un nombre r est de la première classe si r (AB) existe et si r(AB) $<$ (CD), et qu'il est de la seconde classe si r(AB) existe et si r(AB) $>$ (CD) ou si r(AB) n'existe pas. Un nombre quelconque de la seconde classe est supérieur à un nombre quelconque de la première classe (§§ 114 et 115). S'il existe un nombre irrationnel positif m supérieur à tous les nombres r de la première classe et inférieur à tous les nombres r de la seconde classe nous dirons que m est la *mesure* de (CD) avec (AB) comme unité.

Etant donnés un segment (AB) et un nombre irrationnel positif m, nous désignerons par l'expression m (AB) tout segment qui a pour mesure m avec (AB) comme unité.

124. Théorème *Si r_1 est un nombre rationnel positif tel que r_1* (AB) *existe et si m est un nombre irrationnel positif inférieur à r_1, m* (AB) *existe.*

Démonstration. Soit (CR_1) un segment tel que (CR_1) $\equiv r_1$ (AB); soient r' un nombre rationnel positif quelconque inférieur à m et r'' un nombre rationnel positif quelconque satisfaisant à $m < r'' < r_1$. Il y a un point R′ entre C et R_1 tel que (CR′) $\equiv r'$(AB) et un point R″ entre C et R_1 tel que (CR″) $\equiv r''$(AB) (§§ 114 et 115). R′ est entre C et R″. Divisons les points de (CR_1) en deux classes, la première comprenant les points appartenant à l'un au moins des segments (CR′), la seconde comprenant les points qui n'appartiennent jamais à (CR′), quelque soit r'. Les deux

classes sont séparées par un point limite D, situé entre C et R_1 (§ 10, postulat IV).

Si maintenant un nombre rationnel positif r est inférieur à m, il y a un point R entre C et R_1 tel que $(CR) \equiv r(AB)$, R appartient à la première classe, R est entre C et D ou coïncide avec D; soit r'_1 un nombre rationnel tel que $r < r'_1 < m$; il y a un point R'_1 entre R et R_1 tel que $(CR'_1) \equiv r'_1(AB)$; R'_1 est entre C et D ou coïncide avec D; il résulte de là que R ne coïncide pas avec D et l'on a $r(AB) < (CD)$. Soit d'un autre côté r un nombre rationnel positif supérieur à m. Si l'on a $r \geqslant r_1$, $r(AB)$ n'existe pas ou est supérieur à (CD). Si l'on a $m < r < r_1$, il y a un point R entre C et R_1 tel que $(CR) \equiv r(AB)$; R appartient à la seconde classe, R est entre D et R_1 ou coïncide avec D. On voit comme tantôt que R ne peut coïncider avec D. On a donc $r(AB) > (CD)$.

Cela étant, on déduit par un raisonnement simple du § 123 qu'on peut représenter (CD) par $m(AB)$.

125. Théorème. *Un même segment ne peut pas avoir à la fois une mesure rationnelle et une mesure irrationnelle avec un même autre segment comme unité.*

Démonstration. Supposons que (CD) ait à la fois le nombre irrationnel positif m et le nombre rationnel positif r_1 comme mesure, avec (AB) comme unité. Supposons pour fixer les idées $r_1 < m$. Il y a un nombre rationnel positif r satisfaisant à $r_1 < r < m$; $r(AB)$ existe (§ 123); on a $r(AB) > r_1(AB)$ (§ 114), donc $r(AB) > (CD)$, donc $r > m$ (§ 123). Nous arrivons donc à une contradiction. On montre de la même façon qu'on ne peut pas avoir $m < r_1$. Il en résulte que (CD) ne peut pas avoir à la fois m et r_1 comme mesure, et le théorème est établi.

126. Supposons maintenant que (CD) ait pour mesure m avec (AB) comme unité, m étant un nombre irrationnel positif. Examinons les deux classes de nombres r du § 123. Tout nombre r appartient à l'une de ces deux classes (§ 125). D'autre part, m divise tous les nombres r en deux classes, la classe $r < m$ et la classe $r > m$. La première classe du § 123 est identique à la classe $r < m$ et la

seconde classe du § 123 est identique à la classe $r > m$.

Soit maintenant (EF) un segment quelconque assez petit pourque (CD) — (EF) et (CD) + (EF) existent. On voit aisément par le § 116 que si r tend vers m en restant dans la première classe ou en restant dans la seconde classe, r (AB) restera à partir d'un certain instant compris entre les segments (CD) — (EF) et (CD) ou (CD) et (CD) + (EF).

127. Théorème. *Si* m (AB) *existe,* m *étant un nombre irrationnel positif, tous les segments représentés par* m (AB) *sont congruents entre eux. Si* $(A'B') \equiv (AB)$, *les segments représentés par* $m\,(A'B')$ *sont les mêmes que ceux représentés par* m (AB).

Démonstration. Soient (CD) et (C'D') deux segments quelconques pouvant être représentés par m (AB).

Supposons $(CD) < (C'D')$. Il y a un nombre rationnel positif r tel que $(CD) < r\,(AB) < (C'D')$ (§ 116). On a donc $r < m$ et $r > m$, ce qui est impossible. De même, on ne peut avoir $(C'D') < (CD)$. Donc, $(CD) \equiv (C'D')$. La première partie du théorème est donc établie. On voit immédiatement que la seconde partie est également vraie.

128. Théorème. *Soient* m *et* m' *deux nombres positifs ; supposons que* m(AB) *et* m' (A'B') *existent. Moyennant les hypothèses placées ci-dessous, on aura les congruences ou inégalités placées en regard.*

	Hypothèses.	Conséquences.
$m = m'$	$(AB) \equiv (A'B')$	$m\,(AB) \equiv m'(A'B')$
	$(AB) > (A'B')$	$m(AB) > m'(A'B')$
	$m\,(AB) \equiv m'(A'B')$	$(AB \equiv (A'B')$
	$m(AB) > m'(A'B')$	$(AB) > (A'B')$
$(AB) \equiv (A'B')$	$m = m'$	$m(AB) \equiv m'(A'B')$
	$m > m'$	$m(AB) > m'(A'B')$
	$m(AB) \equiv m'(A'B')$	$m = m'$
	$m(AB) > m'(A'B')$	$m > m'$.

Démonstration. Montrons que si $(AB) > (A'B')$, on a $m(AB) > m(A'B')$, m étant irrationnel.

Soit r un nombre rationnel positif quelconque inférieur

à m. Il existe deux segments (EF) et (E'F') tels que

$$m(AB) \equiv r(AB) + (EF),$$
$$m(A'B') \equiv r(A'B') + (E'F').$$

On a

$$m(AB) \equiv r((AB) - (A'B')) + r(A'B') + (EF),$$
$$m(A'B') \equiv r(A'B') + (E'F').$$

Soit r_1 un nombre rationnel positif fixe inférieur à m. Prenons $r > r_1$. On peut prendre r assez près de m pour-que $(E'F') < r_1((AB) - (A'B'))$ (§ 126). Alors on a

$$r((AB) - (A'B')) > r_1((AB) - (A'B')) > (E'F').$$

Par conséquent, $m(AB) > m(A'B')$.

La démonstration de la partie restante du théorème n'offre pas la moindre difficulté.

129. Théorème. *Si m et m' sont des nombres positifs, si m(AB) existe et si $m' < m$, m'(AB) existe; si (A'B') < (AB), m(A'B') existe.*

Démonstration. La première partie du théorème se démontre sans la moindre difficulté. Etablissons la seconde partie. Il y a un nombre rationnel r tel que $r(AB) > m(AB)$ (§ 116). $r(A'B')$ existe (§ 115). On a $r > m$ (§ 128). Donc, $m(A'B')$ existe, d'après la première partie du théorème.

C. q. f. d.

130. Théorème. *Etant donnés deux segments quelconques* (AB) *et* (CD), *il existe un nombre positif m et un seul tel que* $(CD) \equiv m(AB)$.

Démonstration. S'il existe un nombre m, il n'y en a qu'un (§ 128). Il suffit donc de montrer qu'il y a un nombre m tel que $(CD) \equiv m(AB)$

Divisons tous les nombres rationnels positifs r en deux classes, la première comprenant les nombres r tels que $r(AB) \leqq (CD)$, la seconde comprenant les nombres r tels que $r(AB) > (CD)$ ou tels que $r(AB)$ n'existe pas. Il n'y a pas de nombre dans la seconde classe inférieur à tous les autres (§ 116).

S'il y a un nombre m de la première classe supérieur à tous les autres, on a $m(AB) \equiv (CD)$, et m satisfait à la question.

S'il n'y a pas de nombre de la première classe supérieur à tous les autres, les deux classes sont séparées par un nombre irrationnel m et l'on voit immédiatement d'après le § 123 qu'on a $m(AB) \equiv (CD)$. C. q. f. d.

131. Théorème. *Soit m un nombre positif tel que $m(AB)$ existe. A tout segment (UV) donné à l'avance on peut faire correspondre un nombre positif β tel que m' soit positif, que $m'(AB)$ existe et que*

$$| m(AB) - m'(AB) | < (UV),$$

dès que m' est un nombre différent de m satisfaisant à

$$| m - m' | < \beta.$$

Démonstration. — On peut établir ce théorème sans la moindre difficulté en se basant sur les §§ 126 et 128.

Réciproque. *Soient (CD) et (AB) deux segments fixes et $(C'D')$ un segment quelconque Posons (§ 130) $(CD) \equiv m(AB)$, $(C'D') \equiv m'(AB)$. A tout nombre positif β donné à l'avance on peut faire correspondre un segment (UV) tel que l'on ait*

$$| m - m' | < \beta$$

dès que $(C'D')$ est un segment satisfaisant à

$$| (CD) - (C'D') | < (UV).$$

132. Théorème. *Supposons donnés deux segments (AB) et (CD) et un nombre positif m (rationnel ou irrationnel). Supposons que tout nombre rationnel positif r pour lequel $r(AB) > (CD)$ ou tel que $r(AB)$ n'existe pas soit supérieur à m, et que tout nombre rationnel positif r pour lequel $r(AB) < (CD)$ soit inférieur à m. Alors on a $(CD) \equiv m(AB)$.*

Démonstration. Si m est irrationnel, le théorème résulte du § 123. Si m est rationnel, on peut raisonner comme suit. $m(AB)$ existe. Supposons $(CD) < m(AB)$. Il y a un nombre rationnel positif r tel que $(CD) < r(AB) < m(AB)$. On a $r < m$, et comme $r(AB) > (CD)$, il faudrait avoir $r > m$. On ne peut donc avoir $(CD) < m(AB)$. De même on ne peut avoir $m(AB) < (CD)$. On a donc $(CD) \equiv m(AB)$.

C. q. f. d.

133. Théorème. *Soit m un nombre positif; si $m((A_1A'_1) + \cdots + (A_nA'_n))$ existe, $m(A_1A'_1) + \cdots + m(A_nA'_n)$ existe;*

si $m(A_1A'_1)+\cdots+m(A_nA'_n)$ *et* $(A_1A'_1)+\cdots+(A_nA'_n)$ *existent*, $m((A_1A'_1)+\cdots+(A_nA'_n))$ *existe; on a dans les deux cas*

$$m((A_1A'_1)+\cdots+(A_nA_n'))\equiv m(A_1A'_1)+\cdots+m(A_nA'_n).$$

Démonstration. Si $m((A_1A'_1)+\cdots+(A_nA'_n))$ existe, il y a un nombre rationnel r supérieur à m tel que $r((A_1A'_1)+\cdots+(A_nA'_n))$ existe. Alors, $r(A_1A'_1)+\cdots+r(A_nA'_n)$ existe (§ 117). $r(A_1A'_1)>m(A_1A'_1)$, $\cdots$, $r(A_nA'_n)>m(A_nA'_n)$ (§ 128). Donc, $m(A_1A'_1)+\cdots+m(A_nA'_n)$ existe.

Si $m(A_1A'_1)+\cdots+m(A_nA'_n)$ et $(A_1A'_1)+\cdots+(A_nA'_n)$ existent, il y a n nombres rationnels $r_1,\ldots,r_n$ supérieurs à m tels que $r_1(A_1A'_1),\ldots,r_n(A_nA'_n)$ existent. Soit r' le plus petit des nombres $r_1,\ldots,r_n$. On a $r'>m$, et $r'(A_1A'_1),\ldots,r'(A_nA'_n)$ existent. Il y a un segment (CD) tel que $m(A_1A'_1)+\cdots+m(A_nA'_n)+(CD)$ existe. Alors, $(m(A_1A'_1)+\frac{1}{n}(CD))+\cdots+(m(A_nA'_n)+\frac{1}{n}(CD))$ existe. Prenons maintenant un nombre rationnel positif r tel que $m<r<r'$, et tel que $r(A_1A'_1)-m(A_1A'_1)<\frac{1}{n}(CD),\ldots,r(A_nA'_n)-m(A_nA'_n)<\frac{1}{n}(CD)$ (§ 131). Alors, $[m(A_1A'_1)+(r(A_1A'_1)-m(A_1A'_1))]+\cdots+[m(A_nA'_n)+(r(A_nA'_n)-m(A_nA'_n))]$ existe. Donc, $r(A_1A'_1)+\cdots+r(A_nA'_n)$ existe, $r((A_1A'_1)+\cdots+(A_nA'_n))$ existe (§ 117) et $m((A_1A'_1)+\cdots+(A_nA'_n))$ existe aussi (§ 129).

Supposons maintenant que $m((A_1A'_1)+\cdots+(A_nA'_n))$ et $m(A_1A'_1)+\cdots+m(A_nA'_n)$ existent et montrons que

$$m((A_1A'_1)+\cdots+(A_nA'_n))\equiv m(A_1A'_1)+\cdots+m(A_nA'_n).$$

Posons $(C'D')\equiv m(A_1A'_1)+\cdots+m(A_nA'_n)$. Il s'agit de montrer que $m((A_1A'_1)+\cdots+(A_nA'_n))\equiv(C'D')$. Soient r' et r'' deux nombres rationnels positifs tels que $r'((A_1A'_1)+\cdots+(A_nA'_n))<(C'D')$ et $r''((A_1A'_1)+\cdots+(A_nA'_n))>(C'D')$. On a

$$r'(A_1A'_1)+\cdots+r'(A_nA'_n)<(C'D').$$

Si l'on avait $r'>m$, on aurait $r'(A_1A'_1)>m(A_1A'_1)$, ...,

$r'(A_nA'_n) > m(A_nA'_n), r'(A_1A'_1) + \cdots + r'(A_nA'_n) > m(A_1A'_1) + \cdots + m(A_nA'_n), r'(A_1A'_1) + \cdots + r'(A_nA'_n) > (C'D')$. On n'a donc pas $r' > m$. De même, on n'a pas $r' = m$. Donc, $r' < m$. On montre de la même façon que $r'' > m$. On a donc $m((A_1A'_1) + \cdots + (A_nA'_n)) \equiv (C'D')$ (§ 132).

134. Théorème. *Soit m un nombre positif; si $m((AB) - (CD))$, $m(AB)$ et $m(CD)$ existent, alors $m(AB) - m(CD)$ existe et réciproquement; l'on a dans les deux cas $m((AB) - (CD)) \equiv m(AB) - m(CD)$. Le théorème est aussi valable pour $|(AB) - (CD)|$.*

Démonstration. Si $m((AB) - (CD))$, $m(AB)$ et $m(CD)$ existent, on a $(AB) > (CD)$, $m(AB) > m(CD)$ (§ 128) et $m(AB) - m(CD)$ existe. Si $m(AB) - m(CD)$ existe, $m(AB) > m(CD)$, $(AB) > (CD)$, $(AB) - (CD)$ existe; $(AB) > ((AB) - (CD))$, et $m((AB) - (CD))$ existe.

Supposons maintenant que $m((AB) - (CD))$, $m(AB)$, $m(CD)$ et $m(AB) - m(CD)$ existent. On a

$$((AB) - (CD)) + (CD) \equiv (AB),$$
$$m[((AB) - (CD)) + (CD)] \equiv m(AB),$$
$$m[((AB) - (CD)) + (CD)] \equiv m((AB) - (CD)) + m(CD) \quad (\S\, 133),$$
$$m((AB) - (CD)) + m(CD) \equiv m(AB),$$
$$m((AB) - (CD)) \equiv m(AB) - m(CD).$$

C. q. f. d.

Le cas où il s'agit de montrer que $m|(AB) - (CD)| \equiv |m(AB) - m(CD)|$ se traite sans la moindre difficulté.

135. Théorème. *Soient $m_1, m_2, \ldots, m_n$ des nombres positifs; si $(m_1 + \cdots + m_n)(AB)$ existe, $m_1(AB) + \cdots + m_n(AB)$ existe et réciproquement. On a dans les deux cas $(m_1 + \cdots + m_n)(AB) \equiv m_1(AB) + \cdots + m_n(AB)$.*

Démonstration. Si $(m_1 + \cdots + m_n)(AB)$ existe, on peut trouver un nombre rationnel positif r supérieur à $(m_1 + \cdots + m_n)$ tel que $r(AB)$ existe. On peut trouver n nombres rationnels positifs $r_1, \ldots, r_n$ tels que $r_1 + \cdots + r_n = r$, $r_1 > m_1, \ldots, r_n > m_n$. $(r_1 + \cdots + r_n)(AB)$ existe; donc, $r_1(AB) + \cdots + r_n(AB)$ existe (§ 119). On a $r_1(AB) > m_1(AB), \ldots, r_n(AB) > m_n(AB)$; donc, $m_1(AB) + \cdots + m_n(AB)$ existe.

Si $m_1(AB) + \cdots + m_n(AB)$ existe, on peut trouver un segment (CD) tel que $m_1(AB) + \cdots + m_n(AB) + (CD)$ existe. Alors, $(m_1(AB) + \frac{1}{n}(CD)) + \cdots + (m_n(AB) + \frac{1}{n}(CD))$ existe. On peut trouver n nombres rationnels positifs $r_1, \ldots, r_n$ tels que $m_1(AB) + \frac{1}{n}(CD) > r_1(AB) > m_1(AB), \ldots,$ $m_n(AB) + \frac{1}{n}(CD) > r_n(AB) > m_n(AB)$. On a $r_1 > m_1, \ldots,$ $r_n > m_n$; $r_1(AB) + \cdots + r_n(AB)$ existe, $(r_1 + \cdots + r_n)(AB)$ existe. Or, $r_1 + \cdots + r_n > m_1 + \cdots + m_n$; donc, $(m_1 + \cdots + m_n)$ (AB) existe.

Supposons maintenant que $(m_1 + \cdots + m_n)(AB)$ et $m_1(AB) + \cdots + m_n(AB)$ existent. Posons

$$m_1(AB) + \cdots + m_n(AB) \equiv (C'D').$$

Il s'agit de montrer que

$$(m_1 + \cdots + m_n)(AB) \equiv (C'D').$$

Soient r' et r'' deux nombres rationnels positifs tels que l'on ait

$$r'(AB) < (C'D') \quad \text{et} \quad r''(AB) > (C'D').$$

Supposons $r' > m_1 + \cdots + m_n$. On peut trouver n nombres rationnels positifs $r'_1, \ldots, r'_n$ tels que $r'_1 + \cdots + r'_n = r'$ et que $r'_1 > m_1, \ldots, r'_n > m_n$. On a $r'(AB) \equiv r'_1(AB) + \cdots + r'_n(AB)$ $> m_1(AB) + \cdots + m_n(AB) \equiv (C'D')$, ce qui n'est pas. On n'a donc pas $r' > m_1 + \cdots + m_n$. Supposons $r' = m_1 + \cdots$ $+ m_n$. Il y a un nombre rationnel positif ρ' tel que $r'(AB)$ $< \rho'(AB) < (C'D')$. On a $\rho' > r'$ et donc $\rho' > m_1 + \cdots + m_n$, ce qui est impossible. On a donc $r' < m_1 + \cdots + m_n$. On montre de la même façon que $r'' > m_1 + \cdots + m_n$. On a donc bien $(m_1 + \cdots + m_n)(AB) \equiv (C'D')$.

136. Théorème. *Soient m_1 et m_2 des nombres positifs; si $m_1 > m_2$ et si $(m_1 - m_2)(AB)$, $m_1(AB)$ et $m_2(AB)$ existent, alors $m_1(AB) - m_2(AB)$ existe et réciproquement, et l'on a dans les deux cas*

$$(m_1 - m_2)(AB) \equiv m_1(AB) - m_2(AB).$$

137. Théorème. *Soient m_1 et m_2 deux nombres positifs;*

si $m_1(m_2(AB))$ *existe,* $(m_1m_2)(AB)$ *existe; si* $(m_1m_2)(AB)$ *et* $m_2(AB)$ *existent,* $m_1(m_2(AB))$ *existe, et l'on a dans les deux cas*

$$m_1(m_2(AB)) \equiv (m_1m_2)(AB).$$

Démonstration. Supposons que $m_1(m_2(AB))$ existe. On peut trouver un segment (EF) tel que $m_1(m_2(AB)) + (EF)$ existe. Soit n un nombre entier et positif supérieur à m_1. $n\left(\frac{1}{n}(EF)\right)$ existe, et $m_1\left(\frac{1}{n}(EF)\right)$ existe (§ 129) On a $m_1\left(\frac{1}{n}(EF)\right) < n\left(\frac{1}{n}(EF)\right)$ (§ 128). $m_1(m_2(AB)) + n\left(\frac{1}{n}(EF)\right)$ existe et donc aussi $m_1(m_2(AB)) + m_1\left(\frac{1}{n}(EF)\right)$. Soit maintenant (GH) un segment tel que $m_2(AB) + (GH)$ existe. Nous pouvons prendre n tel que $\frac{1}{n}(EF) < (GH)$ (§§ 107 et 108). Alors $m_2(AB) + \frac{1}{n}(EF)$ existe, $m_1\left(m_2(AB) + \frac{1}{n}(EF)\right)$ existe (§ 133). On peut trouver un nombre rationnel r_2 tel que $m_2(AB) < r_2(AB) < m_2(AB) + \frac{1}{n}(EF)$. On a $r_2 > m_2$. $m_1(r_2(AB))$ existe (§ 129). Il y a un nombre rationnel positif r_1 supérieur à m_1 tel que $r_1(r_2(AB))$ existe. Alors $(r_1r_2)(AB)$ existe (§ 121). Or, $m_1m_2 < r_1r_2$; donc, $(m_1m_2)(AB)$ existe.

Supposons maintenant que $(m_1m_2)(AB)$ et $m_2(AB)$ existent. Soit r un nombre rationnel positif fixe supérieur à m_1m_2 tel que $r(AB)$ existe. Soit maintenant r_2 un nombre rationnel positif variable supérieur à m_2. Posons $r_1 = \frac{r}{r_2}$; r_1 sera aussi un nombre rationnel positif et l'on aura $r_1r_2 = r$. Si r_2 tend vers m_2, on est sûr qu'à partir d'un certain moment $r_2(AB)$ existera. D'autre part, si r_2 tend vers m_2, r_1 tend vers $\frac{r}{m_2}$, qui est supérieur à $\frac{m_1m_2}{m_2}$ ou à m_1; r_1 sera donc à partir d'un certain moment supérieur à m_1. On peut donc trouver une valeur particulière de r_2 telle que $r_2(AB)$ existe et que r_1 soit supérieur à m_1. Désignons

actuellement par r_2 cette valeur particulière de r_2 et par r_1 la valeur particulière de la variable r_1 qui y répond. $(r_1 r_2)(AB)$ et $r_2(AB)$ existent. Donc, $r_1(r_2(AB))$ existe (§ 121). $m_2(AB)$ existe et l'on a $m_2(AB) < r_2(AB)$ Donc, $r_1(m_2(AB))$ existe. Donc, $m_1(m_2(AB))$ existe.

Supposons maintenant que $m_1(m_2(AB))$ et $(m_1 m_2)(AB)$ existent. Posons $m_1(m_2(AB)) \equiv (CD)$. Montrons qu'on a $(CD) \equiv (m_1 m_2)(AB)$.

Soit r' un nombre rationnel positif tel que $r'(AB) < (CD)$. Supposons que l'on ait $r' > m_1 m_2$. On peut trouver, comme nous l'avons montré plus haut, deux nombres rationnels positifs r'_1 et r'_2 tels que $r'_1 r'_2 = r'$, $r'_2 > m_2$, $r'_1 > m_1$ et tels que $r'_2(AB)$ existe. Alors on a $r'(AB) \equiv (r'_1 r'_2)(AB) \equiv r'_1(r'_2(AB)) > r'_1(m_2(AB)) > m_1(m_2(AB)) \equiv (CD)$, ce qui n'est pas. Donc, on n'a pas $r' > m_1 m_2$. Supposons $r' = m_1 m_2$. On peut trouver un nombre rationnel positif ρ' tel que $r'(AB) < \rho'(AB) < (CD)$. On a $\rho' > r'$, c. à d. $\rho' > m_1 m_2$, ce qui est impossible d'après ce que nous venons de voir. On a donc $r' < m_1 m_2$.

Soit ensuite r'' un nombre rationnel positif tel que $r''(AB) > (CD)$. Supposons $r'' < m_1 m_2$. On peut trouver deux nombres rationnels positifs r''_1 et r''_2 tels que $r''_1 r''_2 = r''$, $r''_1 < m_1$, $r''_2 < m_2$. Alors on a $r''(AB) \equiv (r''_1 r''_2)(AB) \equiv r''_1(r''_2(AB))$, puisque, r''_2 étant inférieur à m_2, $r''_2(AB)$ existe. On a ensuite $r''_1(r''_2(AB)) < r''_1(m_2(AB)) < m_1(m_2(AB)) \equiv (CD)$. Donc, $r''(AB) < (CD)$, ce qui n'est pas. On n'a donc pas $r'' < m_1 m_2$. On montre en raisonnant comme nous l'avons déjà fait à plusieurs reprises qu'on ne peut pas avoir $r'' = m_1 m_2$. On a donc $r'' > m_1 m_2$.

De là il suit qu'on a $(CD) \equiv (m_1 m_2)(AB)$.

C. q. f. d.

138. Théorème. *Si m est un nombre positif et si l'on a $(AB) \equiv m(CD)$, on a* $(CD) \equiv \frac{1}{m}(AB)$.

139. Convention. Etant donnés deux segments quelconques (AB) et (CD), et un nombre positif m, nous avons défini dans tous les cas possibles (§§ 111 et 123) le sens de

la proposition « m est la mesure de (AB) avec (CD) comme unité ». Nous avons vu qu'étant donnés deux segments quelconques (AB) et (CD), il y a toujours un nombre positif et un seul qui est la mesure de (AB) avec (CD) comme unité (§ 130). Dans la suite, ces nombres qui sont la mesure de certains segments avec certains segments comme unités joueront un rôle capital.

A partir de cet instant nous observerons toujours la convention suivante, sauf lorsque nous disons expressément le contraire. Choisissons un segment quelconque mais bien déterminé et fixe. Appelons ce segment *l'unité de longueur*. Lorsque dans la suite nous parlerons de la mesure d'un segment, sans spécifier quel segment est pris comme unité, nous entendrons par là la mesure du segment en question avec l'unité de longueur comme unité.

Cette convention ne nous empêchera nullement de considérer les mesures de certains segments avec d'autres segments que l'unité de longueur comme unité. Par exemple, (CD) étant un segment non congruent à l'unité de longueur, nous pourrons sans explications considérer le nombre m défini par $(AB) \equiv m(CD)$. Mais, écrire $(AB) \equiv m(CD)$, c'est spécifier que m est la mesure de (AB) avec (CD) comme unité et non avec l'unité de longueur comme unité.

140. Définition. Si l'on a $(AB) \equiv m(CD)$, le nombre m sera encore appelé le *rapport* du segment (AB) au segment (CD).

141. Notation. Soit un segment quelconque (AB). Nous désignerons par AB le nombre positif qui est la mesure de (AB). Le symbole AB, qui représente un nombre, figurera quelquefois dans les expressions où il entre entre parenthèses, lorsque les règles générales de l'algèbre relatives à l'usage des parenthèses le rendent désirable; par exemple, il pourra arriver que nous désignons le produit des mesures des segments (AB) et (CD) par (AB)(CD); il y aura donc une certaine ambiguité dans le sens du symbole (AB); mais cette ambiguité ne donnera jamais

lieu à confusion, parce que le contexte (par exemple la distinction entre les signes $\equiv$ et $=$) indiquera toujours avec toute la clarté désirable si (AB) désigne le segment (AB) ou la mesure de ce segment.

142. Théorème. *Si l'on a* $(A_1B_1) \equiv (A_2B_2) + \cdots + (A_nB_n)$, *on a aussi* $A_1B_1 = A_2B_2 + \cdots + A_nB_n$ *et réciproquement.*

Si l'on a $(A_1B_1) \equiv (A_2B_2) - (A_3B_3)$ *ou* $(A_1B_1) \equiv |(A_2B_2) - (A_3B_3)|$, *on a aussi* $A_1B_1 = A_2B_2 - A_3B_3$ *ou* $A_1B_1 = |A_2B_2 - A_3B_3|$ *et réciproquement.*

Si l'on a $(A_1B_1) \equiv q(A_2B_2)$, *on a* $A_1B_1 = qA_2B_2$ *et réciproquement.*

Démonstration. Ce théorème se déduit très facilement des §§ 135, 136 et 137.

143. Théorème. *Si l'ensemble de semi-droites constitué par les deux côtés d'un angle* (a, b) *et par les semi-droites intérieures à cet angle est divisé par un procédé quelconque en deux classes de telle façon que*

a) *toute semi-droite de l'ensemble appartient à l'une des deux classes et à une seulement;*

b) *le côté* a *appartient à la première classe et le côté* b *à la seconde classe; chacune des classes contient plus d'une semi-droite;*

c) *si* a' *est une semi-droite de la première classe distincte de* a *et* b' *une de la seconde,* a' *est entre* a *et* b';

alors il existe une semi-droite c *intérieure à l'angle* (a, b) *telle que toute semi-droite entre* a *et* c *appartienne à la première classe et toute semi-droite entre* c *et* b *à la seconde;* c *peut appartenir à l'une ou à l'autre classe.*

Démonstration. Ce théorème se démontre très facilement, si l'on observe que cette division des semi-droites de l'ensemble en deux classes détermine sur un segment dont les extrémités sont distinctes du sommet de l'angle, et se trouvent sur a et b respectivement, une division des points en deux classes qui satisfont aux conditions du postulat de la continuité.

144. Théorème. *Etant donnés un angle* (a, b) *et une semi-droite* a_1 *intérieure à cet angle, il existe un ensemble de semi-droites en nombre fini* $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}$, *com-*

prenant au moins un élément et jouissant de la propriété suivante : les semi-droites a_1, a_2, ..., a_{n-1} sont toutes intérieures à l'angle (a, b); a_2 est entre a_1 et b, a_3 entre a_2 et b, etc., a_{n-1} entre a_{n-2} et b; les angles (a, a_1), (a_1, a_2), ..., (a_{n-2}, a_{n-1}) sont congruents entre eux; (a_{n-1}, b) est congruent ou inférieur à (a, a_1).

Démonstration. Ce théorème se démontre de la même manière que le théorème du § 92.

145. Maintenant, grâce au § 143, tous les théorèmes relatifs aux segments sur lesquels nous nous sommes basés dans les §§ 78-142 se trouvent établis également pour les angles. A cause de cela, on peut étendre sans la moindre difficulté les définitions, théorèmes et conventions concernant les segments des §§ 78-142 aux angles; au § 144 par exemple, nous venons de faire cette extension pour le théorème du § 92. Il est superflu de nous arrêter d'avantage ici à cette extension, et nous la supposons faite. Il sera cependant utile d'ajouter quelques remarques et théorèmes complémentaires.

146. Convention. Nous désignons, comme toujours dans les mathématiques, par π le rapport de la circonférence d'un cercle au diamètre dans la géométrie euclidienne. On a $\pi = 3.14159 \ldots$. On a donc $\frac{\pi}{2} > 1$ et $\frac{1}{\frac{\pi}{2}} < 1$. Soit (a, b) un angle droit. $\frac{1}{\frac{\pi}{2}}(a, b)$ existe. Tous les angles représentés par $\frac{1}{\frac{\pi}{2}}(a, b)$, où (a, b) peut être remplacé par tout autre angle droit, sont congruents entre eux. L'un quelconque de ces angles s'appelle *radiant*. Tandis que pour les segments l'unité de longueur était quelconque (§ 139), nous convenons désormais de prendre comme unité pour les angles un radiant, sauf quand nous stipulons expressément le contraire. La mesure d'un angle droit est donc $\frac{\pi}{2}$.

147 Notation. Pour les segments nous désignons par AB la mesure de (AB) (§ 141). Nous convenons de désigner la mesure d'un angle par le même signe que celui qui sert à désigner l'angle lui-même. Les mesures de $\sphericalangle$ ABC ou de (a, b) seront donc désignées par $\sphericalangle$ ABC ou par (a, b). L'ambiguité introduite ainsi dans la signification des signes $\sphericalangle$ ABC et (a, b) ne donnera pas lieu à confusion, parce qu'en général le contexte indiquera avec toute la clarté désirable s'il s'agit de l'angle ou de sa mesure, et, dans les cas où il n'en est pas ainsi, les deux propositions exprimées par le passage considéré suivant qu'on entend par $\sphericalangle$ ABC ou (a, b) l'angle ou la mesure seront des conséquences presqu'immédiates l'une de l'autre et toutes les deux valables.

148. Théorème. *m étant un nombre positif, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un angle de mesure m, c'est qu'on ait $m < \pi$.*

Démonstration. Soit (a, b) un angle de sommet O dont la mesure est m. On peut mener par O dans le plan ab une droite s telle que a et b soient du même côté de s (§ 30). Soit p la semi-droite issue de O, perpendiculaire à s, et située dans le plan ab du même côté de s que a et b. Soient s' et s'' les deux semi-droites opposées en lesquelles O partage s. Si a coïncide avec p, b est entre p et s' ou entre p et s''; dans les deux cas on a $(a, b) < (p, s')$ Si a ne coïncide pas avec p, a est entre p et s' ou entre p et s''. Supposons pour fixer les idées a entre p et s'. Si b est entre p et s' ou coïncide avec p, on a $(a, b) < (p, s')$; sinon, b est entre p et s'' et l'on a $(a, b) = (a, p) + (p, b)$; $(a, p) < (p, s')$; $(p, b) < (p, s')$. Si $(a, b) < (p, s')$, on a $m < \frac{\pi}{2} < \pi$. Si a est entre p et s' et b entre p et s'', on a

$$m = (a, p) + (p, b),$$

$$(a, p) < \frac{\pi}{2}, (p, b) < \frac{\pi}{2},$$

$$m < \pi.$$

Soit ensuite m un nombre positif inférieur à π; je dis qu'il existe un angle de mesure m; en effet.

Soient a et a' deux semi-droites opposées issues de O. Soit p une semi-droite issue de O perpendiculaire à a. Soit ε un nombre positif variable inférieur à $\frac{\pi}{2}$. Il y a une semi-droite b issue de O située entre p et a' telle que ε soit la mesure de (a', b). On a

$$(a, b) = (a, p) + (p, b),$$
$$(p, b) = (p, a') - (b, a'),$$
$$(p, b) = \frac{\pi}{2} - \varepsilon,$$
$$(a, b) = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = \pi - \varepsilon.$$

Si l'on prend ε assez petit, on aura $\pi - \varepsilon > m$. Comme il existe un angle (a, b) qui a pour mesure $\pi - \varepsilon$, il existe un angle qui a pour mesure m.

Le théorème est donc complètement établi.

149. Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un angle congruent à la somme de plusieurs angles donnés, c'est que la somme des mesures des angles donnés soit inférieure à* π

150. Théorème. *Supposons donnés deux angles* (a, b) *et* (c, d). *Soit* O *le sommet de* (a, b). *Soit* e *la semi-droite issue de* O, *située dans le plan* ab *du côté opposé à celui de* a *par rapport au support de* b, *et telle que* $(b, e) \equiv (c, d)$. *Si* a *et* e *sont deux semi-droites opposées, on a* $(a, b) + (c, d) = \pi$ *et réciproquement.*

Démonstration. Le théorème direct s'établit très facilement en considérant la semi-perpendiculaire à a en O dans le plan ab située du même côté que b.

Pour démontrer la réciproque, on peut raisonner comme suit. Soit a' la semi-droite opposée à a. a' est situé du même côté que e du support de b. On a

$$(a, b) + (b, a') = \pi \text{ (d'après le théorème direct)},$$
$$(b, a') = \pi - (a, b),$$
$$(b, e) = (c, d) = \pi - (a, b) = (b, a'),$$
$$(b, e) \equiv (b. a').$$

Donc, a' et e coïncident. C. q. f. d.

151. THÉORÈME. *Supposons donnés n angles* (b_1, c_1), ..., (b_n, c_n). *Soit* (a, a_1) *un angle de sommet* O *congruent à* (b_1, c_1). *Soit* a_2 *la semi-droite issue de* O *et située dans le plan* aa_1 *du côté opposé à celui de a par rapport au support de* a_1 *telle que* $(a_1, a_2) \equiv (b_2, c_2)$. *Définissons en continuant ainsi les semi-droites* $a_3, \ldots, a_n$. *Nous avons ainsi une suite d'angles* (a, a_1), (a_1, a_2), ..., (a_{n-1}, a_n). *Si toutes les semi-droites intérieures à l'un quelconque des angles de la suite sont extérieures à tous les angles précédents et si* a_n *coincide avec a, on a* $(b_1, c_1) + \cdots + (b_n c_n) = 2\pi$, *et réciproquement.*

CHAPITRE V.

Théorèmes sur les limites et sur la continuité.

152. Théorème. *Supposons donnés un point* O *et deux droites passant par* O *et perpendiculaires entre elles; supposons donnés sur la première droite deux points* N *et* P, *tels que* O *soit entre* N *et* P *et que* $ON = OP$; *supposons donnés sur la seconde droite quatre points* A_1, A_2, B_1, B_2 *tels que* O *soit entre* A_2 *et* B_2, A_1 *entre* O *et* A_2, B_1 *entre* O *et* B_2 *et tels que* $OA_1 = OB_1$, $OA_2 = OB_2$. *Alors on a* $NA_2 > NA_1 > NO$.

Démonstration. On voit d'abord que les triangles NOA_1, NOB_1, POA_1 et POB_1 ont tous leurs éléments congruents chacun à chacun, de même que les triangles NOA_2, NOB_2, POA_2 et POB_2.

Si les droites NA_1 et PA_1 coïncidaient, elles coïncideraient avec NP et avec A_2B_2, c. à d. que NP et A_2B_2 coïncideraient, ce qui est impossible, puisque ces droites sont perpendiculaires. Donc, $|A_1N$ et $|A_1P$ forment un angle, $|A_1O$ est intérieur à cet angle. On a

$$\sphericalangle PA_1N < \pi \quad (\S\ 148),$$

$$\sphericalangle PA_1N \equiv \sphericalangle PA_1O + \sphericalangle OA_1N \equiv 2 \sphericalangle OA_1N,$$

$$\sphericalangle PA_1N = 2 \sphericalangle OA_1N \quad (\S\ 142),$$

$$\sphericalangle OA_1N = \frac{1}{2} \sphericalangle PA_1N < \frac{\pi}{2},$$

$$\sphericalangle OA_1N < \sphericalangle A_1ON \quad (\S\ 128).$$

On n'a donc pas $NA_1 = NO$. Supposons $NO > NA_1$. Il y a un point O' entre N et O tel que $NO' = NA_1$, et un point O'' entre P et O tel que $PO'' = NA_1$. Menons A_1O', $O'B_1$,

B_1O'', $O''A_1$. On a

$$\sphericalangle A_1O'B_1 < \pi,$$
$$\sphericalangle A_1O'B_1 + \sphericalangle A_1O'N + \sphericalangle B_1O'N = 2\pi \quad (\S\ 151),$$
$$\sphericalangle A_1O'N + \sphericalangle B_1O'N > \pi,$$
$$\sphericalangle A_1O'N > \frac{\pi}{2},$$
$$\sphericalangle NA_1O' + \sphericalangle PA_1O'' > \pi,$$
$$\sphericalangle NA_1O' + \sphericalangle PA_1O'' < \sphericalangle PA_1N < \pi.$$

Nous arrivons donc à une contradiction, d'ou il résulte qu'on n'a pas $NO > NA_1$. On a donc $NA_1 > NO$.

Supposons $NA_2 = NA_1$. Soit C le milieu de (A_2A_1). NC est perpendiculaire à A_2B_2, de même que PC. NC et PC forment une même droite, qui coïncide avec NP et avec A_2B_2, ce qui est impossible. On n'a donc pas $NA_2 = NA_1$.

Supposons $NA_1 > NA_2$. Il y a deux points A'_1, B'_1, situés respectivement entre N et A_1, entre N et B_1, et tels que $NA'_1 = NB'_1 = NA_2$. Menons $A_2A'_1$, $B_2B'_1$. Soient E' et F' les milieux de $(A_2A'_1)$ et $(B_2B'_1)$. Menons NE' et NF'; ces droites sont respectivement perpendiculaires à $A_2A'_1$ et à $B_2B'_1$. $A_2A'_1$ coupe NO en un point N'' situé entre N et O; A'_1 est entre A_2 et N''. $B_2B'_1$ coupe aussi NO en un point N''' situé entre N et O. On voit aisément que $ON'' = ON'''$ et que N'' et N''' coïncident. Cela étant, on voit aisément que $N''O$ coupe $E'F'$ en un point N' situé entre E' et F' et entre N'' et O, c. à d. entre N et O. $|E'N''$ est situé entre $|E'N$ et $|E'N'$. $\sphericalangle NE'N'$ est donc obtus. Ensuite on voit aisément que NN' est perpendiculaire à $E'F'$. Entre N' et P il y a un point P_1 tel que $N'P_1 = N'N$. Menons P_1E'. On aura $\sphericalangle P_1E'N' = \sphericalangle NE'N'$. La mesure de $\sphericalangle P_1E'N$ sera donc supérieure à π, ce qui est impossible.

On n'a donc pas $NA_1 > NA_2$. Donc, $NA_2 > NA_1$.

C. q. f. d.

153. Théorème. *Etant donnés un triangle et un sommet de ce triangle, il existe un segment fixe, inférieur à tout segment déterminé par le sommet en question et par un point quelconque appartenant au côté opposé.*

Démonstration. Nous allons d'abord démontrer le

lemme suivant. Etant donnés deux points distincts A et B et une droite BC passant par B et non par A, on peut trouver sur BC de part et d'autre de B deux points B_1 et B_2 tels qu'il existe un segment fixe inférieur à tout segment déterminé par A et un point de (B_1B_2). En effet.

Soit M le milieu de (AB). Elevons en M la perpendiculaire à AB dans le plan ABC et prenons sur celle-ci de part et d'autre de M deux points M_1 et M_2 tels que $MM_1 = MM_2$ et tels que (M_1M_2) ne contienne aucun point de BC. On trouve maintenant facilement sur BC de part et d'autre de B deux points B_1 et B_2 tels que tout segment déterminé par A et un point de (B_1B_2) contienne un point appartenant à (M_1M_2). Soit X un point quelconque de (B_1B_2). Soit Y le point commun à (AX) et (M_1M_2). On a $AX > AY$ et $AY \geqslant AM$ (§ 152). Donc, $AX > AM$.

Le lemme est ainsi établi.

Soit maintenant un triangle ABC. Je dis qu'il existe un segment fixe inférieur à tout segment déterminé par A et un point de (BC). En effet.

Considérons un angle quelconque formé par deux semi-droites x et y du plan ABC issues de A et intérieures à $\sphericalangle$ BAC ou coïncidant avec les côtés de cet angle. Ces deux semi-droites définissent sur (BC) deux points X et Y. Nous dirons que l'angle (x, y) est de première espèce s'il existe un segment fixe inférieur à tout segment déterminé par A et un point de (XY), et que (x, y) est de seconde espèce s'il n'existe pas de segment fixe pareil.

Tout angle (x, y) est ou bien de première espèce, ou bien de seconde espèce. Si un angle (x, y) peut être décomposé en une suite d'angles successifs en nombre fini qui sont chacun de première espèce, l'angle (x, y) lui-même est de première espèce; il suffit pour s'en convaincre de prendre comme segment fixe le segment le plus petit parmi les segments fixes en nombre fini répondant aux différents angles en lesquels (x, y) a été décomposé.

Supposons la thèse fausse. Soit m la mesure de (|AB, |AC); Soit a la demi-droite issue de A qui divise (|AB, |AC) en deux parties congruentes. (|AB, |AC) est de seconde

espèce. Un des angles ($|AB$, a) et (a, $|AC$) au moins est de seconde espèce. Choisissons un de ces deux angles de la manière suivante : si l'un des deux seulement est de seconde espèce, nous choisissons celui-là; si tous les deux sont de seconde espèce, nous choisissons celui des deux qui est le plus près de $|AB$, c. à d. ($|AB$, a). Notre choix est donc parfaitement déterminé. Parmi les deux côtés de l'angle choisi, il y en a un qui coïncide avec $|AB$ ou fait avec $|AB$ un angle inférieur à celui que fait le deuxième côté avec $|AB$. Associons au deuxième côté de l'angle choisi le nombre m''_1 qui est la mesure de l'angle que fait ce côté avec $|AB$ et associons au premier côté de l'angle choisi le nombre m'_1 déterminé comme suit : $m'_1 = 0$ si ce premier côté coïncide avec $|AB$; sinon m'_1 est la mesure de l'angle que fait ce premier côté avec $|AB$. m'_1 et m''_1 sont donc deux nombres parfaitement déterminés quand le triangle ABC et le sommet A qui sert de point de départ sont donnés. On a

$$0 \leqslant m'_1 < m''_1 \leqslant m,$$

$$m''_1 - m'_1 = \frac{m}{2} \cdot$$

Appelons B_1 le point déterminé par le premier côté de l'angle choisi sur (BC) et C_1 le point déterminé par le second côté sur (BC). La mesure de $\sphericalangle B_1AC_1$ est $\frac{m}{2} \cdot$

En opérant sur le triangle B_1AC_1 et le sommet A exactement comme sur BAC et A, on obtient un triangle B_2AC_2, tel que $\sphericalangle B_2AC_2$ est de seconde espèce et a pour mesure $\frac{m}{2^2} \cdot$ Nous définissons les nombres m'_2 et m''_2 qui résultent de cette deuxième opération exactement comme m'_1 et m''_1, avec cette seule différence que m''_2 est la mesure de ($|AB$, $|AC_2$) et non de ($|AB_1$, $|AC_2$), et que m'_2 est nul si $|AB_2$ coïncide avec $|AB$, et est la mesure de ($|AB$, $|AB_2$) dans le cas contraire. On a alors

$$0 \leqslant m'_1 \leqslant m'_2 < m''_2 \leqslant m''_1 \leqslant m,$$

$$m''_2 - m'_2 = \frac{m}{2^2} \cdot$$

On peut répéter cette opération n fois, n désignant un nombre entier et positif arbitraire. Après n opérations, on a

$$0 \leqslant m'_1 \leqslant m'_2 \leqslant \ldots \leqslant m'_n < m''_n \leqslant \ldots \leqslant m''_2 \leqslant m''_1 \leqslant m,$$

$$m''_n - m'_n = \frac{m}{2^n}.$$

Il en résulte qu'on a

$$\lim_{n=+\infty} m'_n = \lim_{n=+\infty} m''_n = \text{un nombre } l \text{ bien déterminé, fini, satisfaisant à } 0 \leqslant l \leqslant m.$$

Soit p la semi-droite située dans le plan ABC et issue de A qui coïncide avec |AB si $l=0$, ou se trouve du même côté de AB que C et satisfait à $l = (|AB, p)$ si $l > 0$. p détermine sur (BC) un point P. Soient P_1 et P_2 deux points quelconques situés sur BC de part et d'autre de P, P_1 étant du côté de B ou P_2 du côté de C. Menons AP_1, AP_2. Soit ε le plus petit des deux nombres $\sphericalangle P_1AP$ et $\sphericalangle PAP_2$. Il y a un nombre positif N tel que l'on a

$$\left.\begin{array}{l} l - m'_n < \varepsilon \\ m''_n - l < \varepsilon \end{array}\right\} \text{ si } n > N.$$

Donnons à n une valeur particulière quelconque n supérieure à N. On aura

$$l - m'_n < \varepsilon,$$
$$m''_n - l < \varepsilon.$$

Il en résulte que $|AB_n$ est entre $|AP_1$ et |AP ou coïncide avec |AP et que $|AC_n$ est entre $|AP_2$ et |AP ou coïncide avec |AP. Or, $(|AB_n, |AC_n)$ est de seconde espèce. Donc, $(|AP_1, |AP_2)$ est de seconde espèce, et cela quelque soient les points P_1 et P_2. Or, cela est impossible d'après le lemme. Il s'ensuit que la thèse est vraie.

154. Théorème. *Etant donnés un plan* α *et dans ce plan un point* A, *il existe un segment fixe* (CD) *jouissant de la propriété suivante : sur chaque semi-droite issue de* A *et située dans le plan* α *il y a un point* B *tel que* AB = CD.

Démonstration. On construit facilement dans α un triangle EFG tel que A soit intérieur à EFG. Menons AE, AG, AF. Toute semi-droite x issue de A dans le plan α coupe le périmètre de EFG en un seul point X. X appar-

tient à (EF), (FG) ou (GE). Cela étant, on établit immédiatement le théorème en appliquant le § 153 aux triangles AEF, AFG et AGE, le sommet A servant chaque fois de point de départ.

155. Théorème. *Si un angle d'un triangle est plus grand qu'un deuxième angle du même triangle, le côté opposé au premier angle est plus grand que le côté opposé au deuxième angle.*

Démonstration. Supposons donné un triangle AB_1C_1 pour lequel on a $\sphericalangle AB_1C_1 > \sphericalangle AC_1B_1$ (fig. 1)(1). Je dis qu'on a $AC_1 > AB_1$. En effet.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. On n'a pas $AC_1 = AB_1$ (§ 38). On a donc $AB_1 > AC_1$ (§ 48). Il y a une semi-droite entre $|B_1C_1$ et $|B_1A$ qui fait avec $|B_1C_1$ un angle congruent à $\sphericalangle AC_1B_1$; cette semi-droite coupe AC_1 en un point C_2 situé entre A et C_1. On a

$$(B_1C_2) \equiv (C_2C_1),$$
$$(AC_1) = (AC_2) + (C_2C_1) \equiv (AC_2) + (B_1C_2) \quad (\S\ 79),$$
$$(AB_1) > (AC_2) + (B_1C_2).$$

(1) Nous n'affirmons nullement dans ce livre que les différents théorèmes géométriques que nous y démontrons sont vrais lorsqu'on fait désigner aux termes géométriques employés dans leurs énoncés des éléments de figures tracées à l'encre sur du papier; nous affirmons seulement que tels et tels théorèmes découlent logiquement de tels et tels postulats. Tout cela résulte du § 2. Les figures tracées à l'encre sur du papier auxquelles nous renvoyons dans certains de nos raisonnements ne constituent donc nullement les objets dont les propriétés sont étudiées dans ces raisonnements. Nous renvoyons à ces figures uniquement parce que pour certaines raisons psychologiques il est plus facile pour l'esprit de suivre les raisonnements en question pendant qu'il se représente ces figures matérielles que de suivre les mêmes raisonnements sans se représenter ces figures. — Nous employons souvent dans ce livre des expressions qui pourraient faire croire que nous entendons parler de figures matérielles, par exemple « menons telle et telle droite ». Ces expressions doivent évidemment partout être interprétées conformément au point de vue du § 2 « Menons telle et telle droite » par exemple ne signifie autre chose que « considérons telle et telle droite » Les associations entre certains raisonnements et certaines représentations étrangères au sens de ces raisonnements du genre de celles que nous encourageons ici par l'emploi de figures et de certaines expressions sont souvent nuisibles au point de vue philosophique mais fertiles au point de vue mathématique.

Il y a donc un point B_2 entre A et B_1 tel que $B_1B_2 \equiv B_1C_2$. On a

$$(AB_1) - (AC_1) \equiv ((AB_2) + (B_2B_1)) - ((AC_2) + (B_1C_2))$$
$$\equiv ((AB_2) + (B_2B_1)) - ((AC_2) + (B_2B_1))$$
$$\equiv [((AB_2) + (B_2B_1)) - (B_2B_1)] - (AC_2) \text{ (§ 100)} \equiv (AB_2) - (AC_2).$$

Donc,

(1) $(AB_2) > (AC_2)$ (§ 88) et $(AB_2) - (AC_2) \equiv (AB_1) - (AC_1)$.

On a ensuite

$$\sphericalangle AB_2C_2 = \pi - \sphericalangle B_1B_2C_2 \text{ (§ 150)} = \pi - \sphericalangle B_1C_2B_2,$$
$$\sphericalangle B_2C_2A + \sphericalangle B_1C_2C_1 = \pi - \sphericalangle B_1C_2B_2 = \sphericalangle AB_2C_2,$$

(2) $$\sphericalangle AB_2C_2 > \sphericalangle B_2C_2A.$$

(1) et (2) montrent qu'entre les éléments de AB_2C_2 existent des inégalités exactement de même espèce qu'entre les éléments de AB_1C_1. En opérant sur AB_2C_2 de la même manière que sur AB_1C_1, on obtient un triangle AB_3C_3 jouissant des propriétés suivantes : B_3 est entre A et B_2, C_3 est entre A et C_2 et l'on a

$$(C_2C_3) \equiv (B_2C_3) \equiv (B_2B_3), \quad (AB_3) > (AC_3),$$
$$(AB_3) - (AC_3) \equiv (AB_1) - (AC_1), \quad \sphericalangle AB_3C_3 > \sphericalangle B_3C_3A.$$

Après avoir répété cette opération en tout $n-1$ fois, on aura une suite de triangles AB_2C_2, AB_3C_3, ..., $AB_{n-1}C_{n-1}$ et AB_nC_n (n désignant un nombre entier positif arbitraire). B_4 est entre A et B_3, C_4 entre A et C_3, etc., B_n est entre A et B_{n-1}, C_n entre A et C_{n-1}. On a de plus

$$(C_{n-1}C_n) \equiv (B_{n-1}C_n) \equiv (B_{n-1}B_n), \quad (AB_n) > (AC_n),$$
$$(AB_n) - (AC_n) \equiv (AB_1) - (AC_1), \quad \sphericalangle AB_nC_n > \sphericalangle B_nC_nA.$$

AB_n et AC_n décroissent constamment quand n croît, mais restent toujours positifs. Il en résulte que $\lim\limits_{n=+\infty} AB_n$ et $\lim\limits_{n=+\infty} AC_n$ existent et sont des nombres finis positifs ou nuls. On a $\lim\limits_{n=+\infty} AB_n < AB_1$ et $\lim\limits_{n=+\infty} AC_n < AC_1$. Il y a donc un point B entre A et B_1 et un point C entre A et C_1 tels que $\lim\limits_{n=+\infty} AB_n = AB$ et $\lim\limits_{n=+\infty} AC_n = AC$. Si une des deux

limites est nulle, nous prenons comme point B ou C correspondant le point A. Or, on a

$$AB_n - AC_n = AB_1 - AC_1 \quad (\S\,142),$$

$$AB_1 - AC_1 = \lim_{n=+\infty} (AB_n - AC_n) = \lim_{n=+\infty} AB_n - \lim_{n=+\infty} AC_n.$$

Donc, $\lim\limits_{n=+\infty} AB_n$ n'est pas nul et B est distinct de A. On a

$$(B_{n-1}B_n) \equiv (AB_{n-1}) - (AB_n),$$

$$\lim_{n=+\infty} B_{n-1}B_n = \lim_{n=+\infty} AB_{n-1} - \lim_{n=+\infty} AB_n,$$

$$\lim_{n=+\infty} AB_{n-1} = \lim_{n=+\infty} AB_n,$$

$$\lim_{n=+\infty} B_{n-1}B_n = 0,$$

(3) $$\lim_{n=+\infty} B_{n-1}C_n = 0,$$

(4) $$\lim_{n=+\infty} BB_{n-1} = 0,$$

(5) $$\lim_{n=+\infty} CC_n = 0.$$

Les points C, B, C_1 et B_1 sont fixes quand n varie. Comme B est distinct de A, les poinis C et B doivent être distincts et le point C_1 n'est pas sur la droite CB. Si C coïncide avec A, le point B_1 est sur CB et B est entre C et B_1. Si C ne coïncide pas avec A, B_1 n'est pas sur CB. B_1 est alors dans le plan C_1CB du même côté de CB que C_1, B_1 et B sont du même côté de CC_1, C et C_1 du même côté de BB_1, B et C du même côté de C_1B_1 (§ 62). C_n est toujours entre C et C_1, B_{n-1} entre B et B_1. Soit O un point fixe situé entre C et B (fig. 2); soient P et N deux points fixes situés respectivement entre C et O et entre B et O et tels que $ON = OP$. Elevons en O dans le plan C_1CB la perpendiculaire à CB; soient M et M_1 deux points fixes situés sur cette perpendiculaire de part et d'autre de O, M étant du même côté de CB que C_1 et OM étant égal à OM_1. Menons MN. D'après (4) et (5) il y a un nombre positif fixe a tel que si $n > a$, il n'y a aucun point sur (CC_n) ou (BB_{n-1}) qui appartienne à la droite M_1M ou à la droite NM. Si $n > a$, MM_1 coupe C_nB_{n-1} en un point C'_n et NM coupe C_nB_{n-1} en un

point B'_{n-1}. C'_n est entre C_n et B_{n-1} et sur |OM. B'_{n-1} est entre C_n et B_{n-1} et sur |NM.

Soient O′ un point quelconque fixe entre M et O et N′ un point quelconque fixe entre M et N. Soit B′ un point quelconque fixe sur CB tel que B soit entre C et B′; soit C″ un point quelconque fixe entre C et C_1 tel que (CC″) ne contienne aucun point de OM ou de NM. Menons C″B′. |OM passe par un point O″ entre C″ et B′, |NM passe par un point N″ entre C″ et B′, et |BB_1 par un point B″ de (C″B′).

Soit C''_1 un point provisoirement variable situé entre C et C″. Il y répond trois points O''_1, N''_1 et B''_1 situés respectivement sur |OM, |NM et |BB_1, les deux 1ers entre C''_1 et B′, le 3e sur (C''_1B'). O''_1 sera de plus situé entre O et O″, N''_1 entre N et N″. Etant donné un point quelconque O''_1 entre O et O″, il y répond un C''_1, un N''_1 et un B''_1. Etant donné un point quelconque N''_1 entre N et N″, il y répond un C''_1, un O''_1 et un B''_1. Suivant que O''_1 ou N''_1 se rapproche de O ou de N, N''_1 se rapproche de N ou O''_1 de O.

Prenons une position particulière $(O''_1)_1$ de O''_1 entre O et O′. Il y répond un $(C''_1)_1$, un $(N''_1)_1$ et un $(B''_1)_1$. Prenons une position particulière $(N''_1)_2$ de N''_1 à la fois entre N et $(N''_1)_1$ et entre N et N′. Il y répond un $(C''_1)_2$, un $(O''_1)_2$ et un $(B''_1)_2$. $(O''_1)_2$ sera entre O et $(O''_1)_1$, c. à d. entre O et O′. Désignons maintenant les points fixes $(C''_1)_2$, $(O''_1)_2$, $(N''_1)_2$ et $(B''_1)_2$ par C''_1, O''_1, N''_1 et B''_1. On voit aisément que N''_1 est entre O''_1 et B′.

D'après (4) et (5), il existe un nombre positif fixe c, supérieur à a et tel que si $n > c$, C_n est entre C et C''_1 et B_{n-1} entre B et B''_1. Si n est plus grand que c, C'_n et O''_1 sont sur |OM; O n'est donc pas entre C'_n et O''_1; si O''_1 était entre O et C'_n, O''_1 serait intérieur au quadrilatère $CBB_{n-1}C_n$ (dans le cas où B_1 n'est pas sur CB), la droite C''_1B' couperait le périmètre du quadrilatère $CBB_{n-1}C_n$ en deux points distincts (§ 61), ce qui est impossible, parce que C''_1B' ne passe ni par un point de (C_nC), ni par un point de (CB), ni par un point de (BB_{n-1}); en continuant

à raisonner ainsi sur les differentes autres éventualités possibles, on voit que C'_n est entre O et O''_1. De même, B'_{n-1} est entre N et N''_1. On voit de plus que B'_{n-1} est entre C'_n et B_{n-1}. C'_n sera donc entre O et O', B'_{n-1} entre N et N' dès que $n > c$. O' et N' sont fixes, il est vrai, mais ont été choisis arbitrairement entre O et M et entre N et M. Donc,

$$\lim_{n=+\infty} OC'_n = 0,$$

(6) $$\lim_{n=+\infty} NB'_{n-1} = 0.$$

Si $n > c$, on a $C'_n B'_{n-1} < C_n B_{n-1}$. Donc,

(7) $$\lim_{n=+\infty} C'_n B'_{n-1} = 0.$$

On a aussi (§ 152)

(8) $$ON < NC'_n < NM.$$

Ensuite on voit aisément que lorsque n croît, C'_n se rapproche de O et NC'_n diminue (§ 152). Il en résulte que $\lim_{n=+\infty} NC'_n$ existe et qu'on a

(9) $$ON < \lim_{n=+\infty} NC'_n < NM.$$

Il y a un point fixe L entre N et M tel que $NL = \lim_{n=+\infty} NC'_n$ (fig. 3). Soient Q le milieu de (NL) et R un point fixe situé entre Q et L. Soit U un point fixe situé entre L et M tel que $LU < QR$. Si $n > c$, on a $NC'_n > NL$. Il y a un nombre d, supérieur à c et fixe, tel que, si $n > d$, $NC'_n - \lim_{n=+\infty} NC'_n < LU$. Si $n > d$, on a

$$NC'_n < \lim_{n=+\infty} NC'_n + LU,$$

$$NC'_n < NL + LU = NU,$$

$$NC'_n < NU.$$

Si $n > d$, il y a un point C''_n entre L et U tel que $NC''_n = NC'_n$.

Elevons en R une perpendiculaire à MN et prenons sur cette perpendiculaire de part et d'autre de R deux points fixes S et T tels que $RS = RT$. Menons SN. Soient F un

point fixe situé entre N et S et E un point fixe situé entre N et Q; soit D un point fixe de MN tel que N soit entre D et M. Menons FD et FE. Il y a un segment fixe (GH) inférieur à tout segment déterminé par N et un point de (FD) ou de (FE) (§ 153). Il résulte de (6) qu'il y a un nombre positif fixe e supérieur à d tel que si $n>e$ on a $NB'_{n-1}<GH$. Considérons la semi-droite issue de N et située dans le plan NMS du même côté de NM que S faisant avec |NM un angle congruent à $\sphericalangle B'_{n-1}NC'_{n}$. Cette semi-droite coupe (DF) ou (EF) en un point qui détermine avec N un segment supérieur à (GH) et donc à (NB'_{n-1}) (nous supposons $n>e$). Il y a donc sur cette semi-droite un point B''_{n-1} tel que $NB''_{n-1}=NB'_{n-1}$ et B''_{n-1} sera intérieur au triangle DFE. Menons $B''_{n-1}C''_{n}$. On aura $B''_{n-1}C''_{n} = B'_{n-1}C'_{n}$. On aura donc d'après (7)

$$(10) \qquad \lim_{n=+\infty} B''_{n-1}C''_{n}=0.$$

RS coupe le périmètre du triangle $NB''_{n-1}C''_{n}$ en un deuxième point Z. Or, tous les point de (NB''_{n-1}) sont situés du même côté de RS; par conséquent, Z sera situé entre B''_{n-1} et C''_{n}. $|C''_{n}F$ coupe RS en un point Z' situé entre S et R. $|C''_{n}B''_{n-1}$ passe par un point situé sur FE entre F et E, puisque B''_{n-1} est intérieur au triangle DEF. Donc, $|C''_{n}B''_{n-1}$ passe par un point situé sur RS entre Z' et R; ce point est évidemment Z. Z est donc entre R et Z', c. à d. entre R et S.

On a maintenant $(RC''_{n})<(RL)+(LU)<(RL)+(QR) \equiv (QL) \equiv (NQ) < (NR)$. Il y a donc sur |RN un point déterminant avec R un segment congruent à (RC''_{n}); comme $RT=RS$, il y a un point sur |RT déterminant avec R un segment congruent à (RZ). Il en résulte qu'on a $C''_{n}Z > RC''_{n}$. On a ensuite

$$B''_{n-1}C''_{n} > C''_{n}Z,$$
$$RC''_{n} > RL,$$
$$(11) \qquad B''_{n-1}C''_{n} > RL.$$

On a (11) pour des valeurs de n supérieures à e arbi-

traires, et RL est fixe, indépendant de n. Il en résulte que (11) est contradictoire avec (10). L'hypothèse dont nous sommes partis est donc fausse. Or, cette hypothèse était qu'on n'a pas $AC_1 > AB_1$. On a donc $AC_1 > AB_1$.

C. q. f. d.

156. Théorème. *Si un côté d'un triangle est plus grand qu'un deuxième côté du même triangle, l'angle opposé au premier côté est supérieur à l'angle opposé au deuxième côté.*

Démonstration. Ce théorème s'établit sans la moindre difficulté par réduction à l'absurde et application du § 155.

157. Théorème. *Dans tout triangle, la mesure d'un côté est inférieure à la somme des mesures des deux autres côtés et supérieure à la valeur absolue de la différence de ces mesures.*

Démonstration. Soit ABC un triangle quelconque. Je dis qu'on a $AB < BC + AC$. En effet.

Supposons la thèse fausse. Alors on a $AB \geqslant BC + AC$. Il existe donc un segment qui a pour mesure $BC + AC$ (§ 129). Donc, $(BC) + (AC)$ existe (§ 142) et l'on a (§ 128)

$$(AB) \geqslant (BC) + (AC).$$

Il y a un point C_1 entre B et A tel que $(BC_1) = (BC)$. On a

$$(AC_1) + (BC_1) \geqslant (BC) + (AC),$$
$$(AC_1) \geqslant (AC).$$

Soit D un point de AC tel que C soit entre A et D. On a

$$\measuredangle AC_1C = \pi - \measuredangle BC_1C = \pi - \measuredangle C_1CB = \measuredangle C_1CA + \measuredangle BCD,$$
$$\measuredangle AC_1C > \measuredangle C_1CA,$$
$$(AC) > (AC_1). \quad (\S\ 155)$$

Nous arrivons donc à une contradiction et par conséquent la thèse est établie.

Je dis maintenant qu'on a $AB > |BC - AC|$.

Supposons pour fixer les idées $AC > BC$. On a d'après ce qui vient d'être établi

$$AC < AB + BC,$$
$$AC - BC < AB,$$
$$AC - BC = |BC - AC|,$$
$$|BC - AC| < AB. \qquad \text{C. q. f. d.}$$

158. Théorème. *Si* P *est un point intérieur au triangle* ABC, *on a* $AP + PB < AC + CB$.

159. Théorème. *Si dans un triangle variable d'une façon quelconque la mesure d'un côté tend vers zéro, la valeur absolue de la différence des mesures des deux autres côtés tend vers zéro.*

160. Théorème. *Supposons donnés deux points distincts* A *et* B *et une semi-droite* a *issue de* B *et dont le support est distinct de* AB. *Soit* X *un point quelconque de* a. *La fonction* AX *de* BX *est définie pour les valeurs positives suffisamment petites de la variable indépendante et elle est uniforme et continue pour toutes les valeurs de la variable indépendante pour lesquelles elle est définie.*

Démonstration. Soit x un nombre réel arbitraire. Ou bien il existe un point X sur a tel que $BX = x$, ou bien il n'existe pas de point X pareil. Dans le premier cas, la fonction AX de BX est définie pour la valeur x de la variable indépendante, dans le second cas elle ne l'est pas. Si x est positif et suffisamment petit, il existe à coup sûr un point X sur a tel que $BX = x$, et la fonction AX est à coup sûr définie pour la valeur x de la variable indépendante. Etant donné un nombre réel x, il est clair que s'il existe un point X sur a pour lequel on a $BX = x$, il n'y a qu'un point X pareil, et on trouve alors une valeur unique pour la mesure AX du segment (AX). Donc, lorsque la fonction AX est définie, ou, en d'autres mots, lorsqu'elle a une valeur, elle n'a qu'une valeur, ou, en d'autres mots, elle est uniforme.

On établit aisément la partie restante du théorème, relative à la continuité, en se basant sur le § 159

161. Théorème. *Supposons donnés deux points distincts* A *et* B *et une semi-droite* a *issue de* B *et dont le support est distinct de* AB. *Soit* X *un point quelconque de* a. *La fonction* $\sphericalangle$ BAX *de* BX *est définie pour les valeurs positives suffisamment petites de la variable indépendante, elle est uniforme et continue quand elle est définie et l'on a* $\lim_{BX \gtrless 0} \sphericalangle BAX = 0$; *réciproquement la fonc-*

tion BX *de* $\sphericalangle$ BAX *est définie pour les valeurs positives suffisamment petites de* $\sphericalangle$ BAX, *elle est uniforme et continue quand elle est définie et l'on a* $\lim\limits_{\sphericalangle BAX \gtrless 0} BX = 0$.

162. Théorème. *Supposons donnés deux points distincts* A *et* B *et un demi-plan* α *limité à la droite* AB. *Appelons* X *un point quelconque de* α *tel que* AB = AX, *s'il existe de tels points. La fonction* BX *de* $\sphericalangle$ BAX *est définie pour les valeurs positives suffisamment petites de* $\sphericalangle$ BAX, *elle est uniforme et continue pour toute valeur de* $\sphericalangle$ BAX *pour laquelle elle est définie; on a* $\lim\limits_{\sphericalangle BAX \gtrless 0} BX = 0$*; si* BX *est défini pour toutes les valeurs de* $\sphericalangle$ BAX *appartenant à un intervalle, la fonction* BX *est constamment croissante ou constamment décroissante dans cet intervalle.*

Démonstration. Il est tout d'abord évident que si à une valeur de $\sphericalangle$ BAX supposée donnée d'avance il répond un point X, il ne pourra y correspondre qu'un point X et une seule valeur de BX. La fonction BX est donc uniforme lorsqu'elle est définie.

Soit C un point fixe du prolongement de AB au delà de B. Soit a une semi-droite fixe issue de C dont le support est distinct de AB et qui est située dans α. Il existe un nombre positif x_1 tel que si x satisfait à $0 < x \leqslant x_1$, la semi-droite issue de A et située dans α faisant avec AB un angle de mesure x coupe a (§ 161). Soit Y le point d'intersection de cette semi-droite avec a. On a $\lim\limits_{\sphericalangle BAY \gtrless 0} CY = 0$ (§ 161) et $\lim\limits_{CY \gtrless 0} AY = AC$ (§ 159). On a donc $\lim\limits_{\sphericalangle BAY \gtrless 0} AY = AC$.

On peut donc trouver un nombre positif x_2, inférieur ou égal à x_1, tel que si x est un nombre quelconque satisfaisant à $0 < x \leqslant x_2$, le point Y répondant à $\sphericalangle BAY = x$ satisfait à $|AC - AY| < BC$. On a donc pour $0 < \sphericalangle BAY \leqslant x_2$

$$AY > AC - BC = AB,$$
$$AY > AB.$$

Il existe donc pour $0 < \sphericalangle BAY \leqslant x_2$ un point X sur

| AY entre A et Y tel que AX = AB. De là il résulte que BX est une fonction de $\sphericalangle$ BAX définie au moins pour $0 < \sphericalangle \text{BAX} \leqslant x_2$.

Montrons maintenant que BX est une fonction continue de $\sphericalangle$ BAX quand elle est définie. Soit X une position particulière quelconque fixe de X. En se basant sur le § 161 et sur ce qui vient d'être démontré, on peut affirmer ce qui suit. Il existe un nombre positif β inférieur à $\sphericalangle$ BAX et jouissant de la propriété suivante: soit x' un nombre quelconque satisfaisant à $\sphericalangle \text{BAX} - \beta \leqslant x' \leqslant \sphericalangle \text{BAX} + \beta$; considérons la semi-droite issue de A et située dans α qui fait avec | AB un angle de mesure x'; cette semi-droite coupe | BX en un point Y′ et sur cette semi-droite se trouve un point X′ tel que AX′ = AB. Bien entendu, nous ne savons pas maintenant si X′ sera situé sur (AY′) ou au delà de Y′. Pour montrer que BX est une fonction continue, il suffira de montrer que $\lim\limits_{x' = \sphericalangle \text{BAX}} \text{BX}' = \text{BX}$. Or, on a

$$\lim_{x' = \sphericalangle \text{BAX}} \text{XY}' = 0 \quad (\S\ 161),$$

$$\lim_{x' = \sphericalangle \text{BAX}} \text{AY}' = \text{AX} \quad (\S\ 159),$$

$$\lim_{x' = \sphericalangle \text{BAX}} \text{X}'\text{Y}' = 0,$$

$$\lim_{x' = \sphericalangle \text{BAX}} \text{XX}' = 0 \quad (\S\ 157),$$

$$\lim_{x' = \sphericalangle \text{BAX}} \text{BX}' = \text{BX} \quad (\S\ 159).$$

La continuité de la fonction BX est donc établie.

Enfin, en raisonnant presqu'exactement comme nous venons de le faire, on montre sans la moindre difficulté qu'on a $\lim\limits_{\sphericalangle \text{BAX} \gtrapprox 0} \text{BX} = 0$

Soient maintenant x_1 et x_3 deux nombres satisfaisant à $0 < x_1 < x_3$ tels que BX soit défini pour $x_1 \leqslant \sphericalangle \text{BAX} \leqslant x_3$. Soit x_2 un nombre satisfaisant à $x_1 < x_2 < x_3$. Soient y_1, y_2 et y_3 les valeurs que prend BX respectivement pour $\sphericalangle \text{BAX} = x_1$, $\sphericalangle \text{BAX} = x_2$ et $\sphericalangle \text{BAX} = x_3$. Si l'on avait $y_3 = y_1$, on aurait $x_3 = x_1$ (§ 50), ce qui n'est pas ; on a

donc $y_3 \neq y_1$. Supposons par exemple $y_3 > y_1$. Je dis qu'on a $y_1 < y_2 < y_3$; en effet.

On n'a pas $y_2 = y_1$; supposons $y_2 < y_1$. La fonction BX est continue dans l'intervalle (x_2, x_3). y_1 est compris entre les valeurs que prend la fonction aux extrémités de cet intervalle. Or, si une fonction $f(x)$ est continue dans un intervalle (x_0, X), et si y' est un nombre compris entre les valeurs $f(x_0)$ et $f(X)$ que prend la fonction aux extrémités de l'intervalle, il existe au moins un nombre x' appartenant à l'intervalle (x_0, X) et tel qu'on a $y' = f(x')$ (Théorème de Cauchy). Il y a donc une valeur x'_1 de la variable indépendante $\sphericalangle$ BAX intérieure à l'intervalle (x_2, x_3) pour laquelle la fonction BX prend la valeur y_1. On a $x'_1 = x_1$ (§ 50), ce qui n'est pas puisqu'on a $x_1 < x_2 < x'_1$. On n'a donc pas $y_2 < y_1$. On a donc $y_1 < y_2$. On trouve de même $y_2 < y_3$.

Si nous avions eu $y_3 < y_1$, nous aurions trouvé $y_3 < y_2 < y_1$.

On déduit aisément de ce qui précède que BX varie constamment dans le même sens quand $\sphericalangle$ BAX croît de x_1 à x_3.

Remarquons que BX croît constamment lorsque $\sphericalangle$ BAX croît de 0 à x_1, si x_1 est un nombre positif tel que BX soit défini pour $0 < \sphericalangle \text{BAX} < x_1$.

163. Théorème. *Supposons donnés deux points distincts* A *et* B *et un demi-plan* α *limité à la droite* AB. *Appelons* X *un point quelconque de* α *tel que* AB = AX. *La fonction* $\sphericalangle$ BAX *de* BX *est définie pour les valeurs positives suffisamment petites de* BX ; *elle est continue et uniforme pour toute valeur de* BX *pour laquelle elle est définie; on a* $\lim_{\text{BX} \gtrless 0} \sphericalangle \text{BAX} = 0$; *si* $\sphericalangle$ BAX *est défini pour toutes les valeurs de* BX *appartenant à un intervalle, la fonction* $\sphericalangle$ BAX *est constamment croissante ou constamment décroissante dans cet intervalle.*

Démonstration. Il résulte tout d'abord du § 50 que la fonction $\sphericalangle$ BAX est uniforme lorsqu'elle est définie. Considérons maintenant la fonction BX de $\sphericalangle$ BAX étudiée au § 162. Il y a un nombre positif x_0 tel que cette

fonction est définie dans l'intervalle $(0, x_0)$. Supposons que pour $\sphericalangle$ BAX $= x_0$ on a BX $= y_0$. Soit maintenant y un nombre quelconque satisfaisant à $0 < y \leqslant y_0$. D'après le § 162 et le théorème de Cauchy, il y a un nombre x satisfaisant à $0 < x \leqslant x_0$ tel que pour $\sphericalangle$ BAX $= x$ on a BX $= y$. Pour BX $= y$ on a donc $\sphericalangle$ BAX $= x$ et la fonction $\sphericalangle$ BAX de BX est définie au moins dans l'intervalle $(0, y_0)$.

Soit maintenant y_2 un nombre positif tel que $\sphericalangle$ BAX soit défini pour BX $= y_2$; soit x_2 la valeur de $\sphericalangle$ BAX pour BX $= y_2$. Soient x_1 et x_3 deux nombres positifs satisfaisant à $x_1 < x_2 < x_3$ et arbitrairement rapprochés de x_2. Si x_1 et x_3 sont assez rapprochés de x_2, la fonction BX de $\sphericalangle$ BAX sera définie pour $x_1 \leqslant \sphericalangle$ BAX $\leqslant x_3$. Soient y_1 et y_3 les valeurs de BX qui répondent respectivement à $\sphericalangle$ BAX $= x_1$ et $\sphericalangle$ BAX $= x_3$. y_2 est compris entre y_1 et y_3 et si $\sphericalangle$ BAX croît de x_1 à x_3, BX varie continûment et toujours dans le même sens de y_1 à y_3 (§ 162). A toute valeur de BX comprise entre y_1 et y_3 répond une valeur de $\sphericalangle$ BAX comprise entre x_1 et x_3. La fonction $\sphericalangle$ BAX est donc continue pour BX $= y_2$.

Par le même raisonnement que celui que nous venons d'employer pour montrer que la fonction $\sphericalangle$ BAX est continue pour BX $= y_2$, on montre que

$$\lim_{BX \gtrless 0} \sphericalangle BAX = 0.$$

Désignons actuellement par y_1 et par y_3 deux nombres satisfaisant à $0 < y_1 < y_3$ tels que la fonction $\sphericalangle$ BAX est définie pour $y_1 \leqslant$ BX $\leqslant y_3$. Soient x_1 et x_3 les valeurs de $\sphericalangle$ BAX répondant à BX $= y_1$ et à BX $= y_3$. La fonction $\sphericalangle$ BAX est continue dans l'intervalle (y_1, y_3). A toute valeur de $\sphericalangle$ BAX comprise entre x_1 et x_3 répond donc une valeur de BX comprise entre y_1 et y_3 (Théorème de Cauchy). La fonction BX de $\sphericalangle$ BAX est donc définie dans l'intervalle (x_1, x_3). Quand $\sphericalangle$ BAX varie dans le même sens de x_1 à x_3, BX croît de y_1 à y_3 (§ 162). Quand donc BX croît de y_1 à y_3, $\sphericalangle$ BAX varie dans le même sens de x_1 à x_3.

Le théorème est ainsi complètement établi.

164. Théorème. *Supposons donnés deux points distincts* A *et* B, *une droite a passant par* B *et distincte de* AB, *et un nombre positif quelconque* α. *Soient* X *un point quelconque de a et* Y *un point quelconque du plan défini par* A *et a. Il existe deux nombres positifs* β_x *et* β_y *tels que l'on a* $\sphericalangle \mathrm{BYX} < \alpha$ *pour tous les points* X *et* Y *pour lesquels on a* $\mathrm{BX} < \beta_x$ *et* $\mathrm{AY} < \beta_y$.

Démonstration. Soient M le milieu de (AB), *m* une droite quelconque fixe située dans le plan de A et de *a*, passant par M et distincte de AB, et C un point quelconque fixe du prolongement de BA au delà de A. Désignons par γ_x et γ_y deux nombres positifs; tout d'abord nous n'assujetissons ces deux nombres qu'à la seule condition d'être positifs, mais dans ce qui suit nous allons assujetir ces nombres successivement à différentes autres conditions, en montrant chaque fois qu'on peut satisfaire à ces conditions. Convenons de ne considérer que les points X et Y pour lesquels on a $\mathrm{BX} < \gamma_x$ et $\mathrm{AY} < \gamma_y$.

Désignons par Δ un triangle fixe situé dans le plan de A et de *a* du même côté de *m* que A et tel que A soit intérieur à ce triangle ; on voit aisément qu'il existe un tel triangle. Prenons désormais γ_y plus petit que le nombre qui est inférieur à la mesure de tout segment déterminé par A et un point du périmètre de Δ (§ 154, démonstration). Alors Y sera intérieur à Δ et situé du même côté de *m* que A ; nous pouvons prendre γ_x assez petit pourque XY et BY coupent *m* en deux points X′ et B′ situés respectivement entre X et Y et entre B et Y.

Etant donné un nombre positif arbitraire, on peut prendre γ_y assez petit pourque $|\mathrm{AB} - \mathrm{YB}|$ reste inférieur à la moitié de ce nombre (§ 157); on peut prendre γ_x assez petit pourque $|\mathrm{XY} - \mathrm{BY}|$ reste aussi inférieur à la moitié de ce nombre. Alors $|\mathrm{AB} - \mathrm{XY}|$ restera certainement inférieur au nombre lui-même. Il en résulte qu'on peut prendre γ_x et γ_y assez petits pourque XY et BY soient toujours supérieurs à AM. Choisissons désormais γ_x et γ_y de façon que cette condition soit remplie. Alors il y aura toujours un point X″ entre X et Y tel que $\mathrm{YX''} = \mathrm{AM}$ et un point B″ entre B et Y tel que $\mathrm{YB''} = \mathrm{AM}$.

Etant donné un nombre positif arbitraire, on peut trouver sur *a* de part et d'autre de B deux points X_1 et X_2 tels que CX_1 et CX_2 coupent *m* en deux points situés de part et d'autre de M et déterminant un segment dont la mesure est inférieure à ce nombre positif donné à l'avance. On peut trouver un triangle situé dans le plan de A et de *a*, entourant le point A, et intérieur à l'angle $\sphericalangle X_1CX_2$. Si l'on prend γ_y inférieur à la mesure du segment qui est plus petit qu'un segment quelconque déterminé par A et par un point du périmètre de ce triangle, Y restera intérieur à ce triangle et donc à $\sphericalangle X_1CX_2$; si de plus on prend γ_x inférieur à la fois à BX_1 et à BX_2, il est aisé de voir que X' et B' seront situés entre les points déterminés par CX_1 et CX_2 sur *m;* X'B', MX' et MB' resteront alors inférieurs au nombre positif donné à l'avance. On peut donc prendre γ_x et γ_y assez petits pourque X'B', MX' et MB' restent inférieurs à un nombre positif donné à l'avance.

Menons MY. On a

$$|AM - MY| < AY \quad (\S\ 157),$$
$$|MY - B'Y| < MB' \quad (\S\ 157),$$
$$|MY - X'Y| < MX'. \quad (\S\ 157)$$

De là résulte qu'on a

$$|AM - X'Y| < AY + MX',$$
$$|AM - B'Y| < AY + MB'$$

De ces inégalités, et de ce qui a été démontré relativement à MX' et MB', il résulte qu'on peut prendre γ_x et γ_y assez petits pourque $|AM - X'Y|$ et $|AM - B'Y|$ restent inférieurs à un nombre positif donné à l'avance. On peut donc prendre γ_x et γ_y assez petits pourque X'X'' et B'B'' restent inférieurs à un nombre positif donné à l'avance.

Menons X''B'. On a (§ 157) $X''B'' < X''B' + B''B' < X''X' + X'B' + B''B'$. On peut donc prendre γ_x et γ_y assez petits pourque X''B'' reste inférieur à un nombre positif donné à l'avance.

Soit π l'une des deux moitiés en lesquelles la droite

AB divise le plan déterminé par A et a. Appelons Z un point quelconque de π tel que $AZ = AM$. D'après le § 163 il existe un nombre positif z_1 fixe jouissant de la propriété suivante : étant donné un nombre quelconque z satisfaisant à $0 < z \leqslant z_1$, il existe un point Z et un seul tel que l'on a $MZ = z$, et pour ce point Z on a $\sphericalangle ZAM \leqslant \alpha$.

Soient maintenant β_x une valeur particulière de γ_x et β_y une valeur particulière de γ_y choisies de telle façon que pour $\gamma_x = \beta_x$ et pour $\gamma_y = \beta_y$ $X''B''$ reste inférieur à z_1; d'après ce qui a été démontré, il est certainement possible de trouver un γ_x et un γ_y remplissant cette condition.

Considérons un point X et un point Y quelconques pour lesquels on a $BX \leqslant \beta_x$ et $AY \leqslant \beta_y$. On aura $X''B'' < z_1$; il y aura un point Z tel que $MZ = X''B''$. On aura

$$\sphericalangle ZAM = \sphericalangle X''YB'' \quad (\S\ 50),$$
$$\sphericalangle ZAM = \sphericalangle BYX,$$
$$\sphericalangle ZAM \leqslant \alpha,$$
$$\sphericalangle BYX \leqslant \alpha.$$

C. q. f d.

165. Théorème. *Supposons donnés deux points distincts* A *et* B *et une semi-droite a issue de* B *et dont le support est distinct de* AB. *Soit* X *un point quelconque de a autre que* B *et soit* Y *un point de a tel que* X *soit entre* B *et* Y. *La fonction* $\sphericalangle AXY$ *de* BX *est définie pour les valeurs positives suffisamment petites de la variable indépendante, elle est uniforme lorsqu'elle est définie, et l'on a* $\lim_{BX \gtrless 0} \sphericalangle AXY = (|BA, a)$.

Démonstration. La première partie du théorème résulte immédiatement du § 161. Il reste à montrer que $\lim_{BX \gtrless 0} \sphericalangle AXY = (|BA, a)$.

Démontrons d'abord le lemme suivant, plus particulier que le théorème : on a $\lim_{BX \gtrless 0} \sphericalangle AXY = (|BA, a)$, si $2(AB)$ existe.

Si $2(AB)$ existe, il y a un segment (A_1B_2) congruent à $2(AB)$. Soient B_1 le milieu de (A_1B_2), B'_1 un point situé entre B_1 et B_2 et B_3 un point du prolongement de A_1B_2 au

delà de B_2. Il existe une semi-droite a_1 issue de B_1 telle que $(\,|\,BA, a) = (\,|\,B_1A_1, a_1)$. Soient a'_1, a_2 et a_3 trois semi-droites qui sont issues respectivement de B'_1, B_2 et B_3, dont les supports sont distincts de A_1B_2 et qui sont situées dans le plan de A_1 et de a_1 du même côté de A_1B_2 que a_1.

On voit aisément qu'on peut trouver un point C_3 sur a_3 tel que A_1C_3 coupe a_1 en un point C_1, a'_1 en C'_1 et a_2 en C_2, et tel que chacun des segments (B_1C_1), $(B'_1C'_1)$, (B_2C_2) et (B_3C_3) ne contienne aucun point des droites auxquelles appartiennent les trois autres segments. Alors C_3 et B_3 sont du même côté de B_1C_1, B_3 et A_1 sont de côtés différents, C_3 et A_1 sont de côtés différents, C_1 est entre A_1 et C_3. On voit de même que C'_1 est entre C_1 et C_3 et C_2 entre C'_1 et C_3.

Pour les valeurs positives suffisamment petites de BX, on pourra trouver entre B_1 et C_1 un point X_1 tel que $BX = B_1X_1$. On aura alors $\sphericalangle AXY = \sphericalangle A_1X_1C_1$. Il suffit donc de démontrer que $\lim\limits_{B_1X_1 \overset{\rightarrow}{>} 0} \sphericalangle A_1X_1C_1 = \sphericalangle A_1B_1C_1$.

A_1X_1 coupe $B'_1C'_1$ en X'_1, B_2C_2 en X_2 et B_3C_3 en X_3. X'_1 est entre B'_1 et C'_1, X_2 entre B_2 et C_2. X_3 entre B_3 et C_3, X_1 entre A_1 et X_3, X'_1 entre X_1 et X_3 et X_2 entre X'_1 et X_3. Soit Z_1 le milieu de (B_1X_1). A_1Z_1 coupe $B'_1C'_1$ en Z'_1, B_2C_2 en Z_2 et B_3C_3 en Z_3. Z'_1 est entre B'_1 et X'_1, Z_2 entre B_2 et X_2, Z_3 entre B_3 et X_3, Z_1 entre A et Z_3, Z'_1 entre Z_1 et Z_3 et Z_2 entre Z'_1 et Z_3.

On voit aisément qu'on a $\lim\limits_{B_1X_1 \overset{\rightarrow}{>} 0} A_1Z_1 = A_1B_1$, $\lim\limits_{B_1X_1 \overset{\rightarrow}{>} 0} Z_1Z'_1 = B_1B'_1$, $\lim\limits_{B_1X_1 \overset{\rightarrow}{>} 0} Z_1Z_2 = B_1B_2 = A_1B_1$, et $\lim\limits_{B_1X_1 \overset{\rightarrow}{>} 0} Z_1Z_3 = B_1B_3$. Il en résulte que pour les valeurs suffisamment petites de B_1X_1, il y a un point W_2 entre Z'_1 et Z_3 tel que $Z_1W_2 = A_1Z_1$. Menons X_1W_2. X_1W_2 coupe $B'_1C'_1$ en un point W'_1 situé entre X_1 et W_2 et entre Z'_1 et X'_1.

On a maintenant $\sphericalangle A_1X_1C_1 = \sphericalangle B_1X_1X'_1 = \sphericalangle W'_1X_1X'_1 + \sphericalangle B_1X_1W_2 = \sphericalangle W'_1X_1X'_1 + \sphericalangle Z_1X_1W_2 = \sphericalangle W'_1X_1X'_1 + \sphericalangle A_1B_1C_1$. On a de plus $\lim\limits_{B_1X_1 \overset{\rightarrow}{>} 0} \sphericalangle A_1B_1C_1 = \sphericalangle A_1B_1C_1$. Ensuite on a $\sphericalangle W'_1X_1X'_1 < \sphericalangle B'_1X_1X'_1$, $\lim\limits_{B_1X_1 \overset{\rightarrow}{>} 0} B'_1X'_1 = 0$,

$\lim\limits_{B_1X_1 \gtrless 0} \sphericalangle B'_1X_1X'_1 = 0$ (§ 164) et donc $\lim\limits_{B_1X_1 \gtrless 0} \sphericalangle W'_1X_1X'_1 = 0$.

On a donc $\lim\limits_{B_1X_1 \gtrless 0} \sphericalangle A_1X_1C_1 = \sphericalangle A_1B_1C_1$. C. q. f. d.

Ce lemme étant établi, nous allons démontrer le théorème dans toute sa généralité.

Soient M le milieu de (AB) et *m* une demi-droite issue de M, dont le support est distinct de AB, et qui est située dans le plan de A et de *a* du même côté de AB que *a*. Pour les valeurs suffisamment petites de BX, AX coupera *m* en un point Z, Z sera situé entre A et X, le segment (MZ) ne contiendra aucun point du support de *a* et le segment (BX) ne contiendra aucun point du support de *m*. On a maintenant

$$\sphericalangle AXY = \sphericalangle MXY - \sphericalangle MXZ,$$

$$\lim_{BX \gtrless 0} \sphericalangle MXY = (|BA, a) \text{ (d'après le lemme)},$$

$$\lim_{BX \gtrless 0} MZ = 0,$$

$$\lim_{BX \gtrless 0} \sphericalangle MXZ = 0 \quad (\S\ 164),$$

$$\lim_{BX \gtrless 0} \sphericalangle AXY = (|BA, a).$$

C. q. f. d.

166. Théorème. *Supposons donnés deux points distincts* A *et* B *et une semi-droite a issue de* B *et dont le support est distinct de* AB. *Soit* X *un point quelconque de a autre que* B. $\sphericalangle$ BXA *est une fonction continue de* BX.

Démonstration. On démontre ce théorème très facilement en se basant sur le § 165.

167. Théorème. *Si deux perpendiculaires à une droite en deux points distincts de cette droite situées dans un même plan ont un point commun, la perpendiculaire élevée à la droite dans ce plan en un point quelconque de la droite passe par ce point commun, et tous les segments déterminés par ce point et par les différents points de la droite sont congruents entre eux.*

Démonstration. Remarquons que ce théorème n'affirme pas qu'il est possible que deux droites perpendiculaires à une troisième aient un point commun ; cela, nous n'en

savons rien pour le moment. Le théorème affirme seulement ce qui arriverait si cette éventualité se présentait.

Supposons que les perpendiculaires élevées dans un même plan à la droite p en deux points distincts A et B aient un point commun P. Soit M le milieu de (AB). Menons PM. On a

$$\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBA \ (\S\ 51),$$
$$PA = PB \ (\S\ 38),$$
$$\sphericalangle PMA = \sphericalangle PMB. \ (\S\ 36)$$

PM est donc perpendiculaire à p en M. La perpendiculaire à p en M dans le plan Pp, qui est unique (§ 54), passe par P. On a ensuite $\sphericalangle PMA = \sphericalangle PAB$ et $PM = PA$.

S'il existe sur p un point M' tel que B soit entre M et M', et que $MB \equiv M'B$, on a $PM' \equiv PM$ (§ 36) $\equiv PA$ et $\sphericalangle PM'B \equiv \sphericalangle PMB$ (§ 36); $\sphericalangle PM'B$ est donc droit, et la perpendiculaire à p en M' dans le plan Pp passe aussi par P.

En continuant ainsi, on montre que si Q est un point quelconque de p tel que $(AQ) \equiv \frac{l}{2^m}(AB)$ (l et m entiers et positifs), la perpendiculaire en Q à p dans le plan Pp passe par P et le segment (PQ) est congruent au segment (PA).

Soit maintenant R un point quelconque fixe de p. On peut faire varier deux nombres entiers et positifs l et m de telle façon que $\frac{l}{2^m}$ soit toujours inférieur à $\frac{AR}{AB}$ et que $\lim \frac{l}{2^m} = \frac{AR}{AB}$. On aura alors

$$AR > \frac{l}{2^m} AB,$$
$$\lim \frac{l}{2^m} AB = AR.$$

Il y aura toujours un point Q entre A et R tel que l'on a $AQ = \frac{l}{2^m} AB$. On aura ensuite

$$(AQ) \equiv \frac{l}{2^m}(AB) \ (\S\ 142),$$

$$\left.\begin{aligned} PQ &= PA \\ \sphericalangle PQA &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \text{ d'après ce qui vient d'être démontré.}$$

$$\lim PQ = PA,$$
$$\lim \sphericalangle PQA = \frac{\pi}{2},$$
$$RQ = AR - AQ,$$
$$\lim RQ = AR - \lim \frac{l}{2^m} AB = AR - AR = 0,$$
$$\lim PQ = PR \text{ (§ 159)},$$
$$\lim \sphericalangle PQA = \sphericalangle PRA \text{ (§ 165)},$$
$$PR = PA,$$
$$\sphericalangle PRA = \frac{\pi}{2}.$$

C. q. f. d.

168. Théorème. *Si dans un triangle deux angles sont tous les deux aigus ou tous les deux obtus, il existe un point et un seul sur le côté déterminé par les sommets de ces deux angles tel que la droite qui passe par ce point et par le troisième sommet soit perpendiculaire au côté en question.*

Démonstration. Supposons que dans le triangle ABC les angles $\sphericalangle ABC$ et $\sphericalangle ACB$ soient aigus. Soient X un point quelconque de (BC) et D un point fixe de BC tel que C soit entre B et D. Si DX varie continûment depuis DC jusque DB, $\sphericalangle AXD$ varie continûment depuis $\sphericalangle ACD$ jusque $\sphericalangle ABD$ (§ 166). Or, $ACD > \frac{\pi}{2} > \sphericalangle ABD$. $\sphericalangle AXD$ passe donc par la valeur $\frac{\pi}{2}$ (théorème de Cauchy). Il y a donc un point X_1 entre B et C tel que AX_1 est perpendiculaire à BC. Le point X_1 est unique; sinon AC serait perpendiculaire à BC (§ 167), ce qui n'est pas le cas par hypothèse.

On raisonnerait exactement de la même façon si $\sphericalangle ABC$ et $\sphericalangle ACB$ étaient tous les deux obtus.

169. Théorème. *Supposons données deux semi-droites a et b, issues de* A *et de* B, *appartenant à des droites différentes situées dans un même plan Soit* X *un point quelconque de a non sur le support de b tel que la perpendiculaire en* X *à a dans le plan ab coupe b, et soit* Y *le point d'intersection de cette perpendiculaire avec b. Si les fonc-*

tions BY *et* $\sphericalangle$ BYX *de* AX *sont définies pour une valeur particulière* x_0 *de* AX, *elles sont définies dans un intervalle suffisamment petit comprenant* x_0 *dans son intérieur et ces fonctions sont uniformes et continues pour toutes les valeurs de* AX *pour lesquelles elles sont définies. Si la fonction* BY *de* AX *est définie pour toutes les valeurs de* AX *appartenant à un intervalle,* BY *est toujours croissant ou toujours décroissant ou constant dans cet intervalle.*

Démonstration. Si à une valeur donnée de AX il répond un point X sur *a*, ensuite un point Y sur *b*, et par conséquent une valeur de BY et une de $\sphericalangle$ BYX, le point X (§ 128) et le point Y (§ 54) sont uniques, et les valeurs de BY et de $\sphericalangle$ BYX sont les seules qui puissent répondre à la valeur donnée de AX. Si donc les fonctions dont il s'agit dans l'énoncé sont définies pour une valeur de AX, elles sont aussi univoquement définies.

Soient maintenant X_0 le point de *a* tel que $AX_0 = x_0$ et Y_0 le point d'intersection de la perpendiculaire élevée en X_0 à *a* dans le plan *ab* avec *b*. Pour démontrer les différentes parties du théorème qu'il nous reste à passer en revue, sauf la dernière relative au sens de variation de BY, nous allons distinguer les deux alternatives suivantes :

1°) La perpendiculaire élevée à *a* en un point quelconque de *a* dans le plan *ab* passe par un point fixe O de X_0Y_0. On peut distinguer trois sous-cas Y_0 est entre O et X_0, ou bien O appartient à (Y_0X_0), ou bien X_0 est entre O et Y_0. On démontre très facilement les différents points à établir en traitant chacun de ces trois sous-cas, et en appliquant le § 166.

2°) On ne se trouve pas dans le cas 1°. Alors deux perpendiculaires élevées à *a* en deux points distincts de *a* dans le plan *ab* n'ont aucun point commun (§ 167).

On peut trouver deux points P et Q situés respectivement sur *a* et *b* et situés dans le plan *ab* du même côté de X_0Y_0 que le point A, et tels que le support de *b* ne passe par aucun point de (X_0P) et le support de *a* par aucun point de (Y_0Q). Soit R un point de *a* tel que X_0

soit entre R et A. $|X_0Q$ est entre $|X_0A$ et $|X_0Y_0$; donc, $|X_0Y_0$ est entre $|X_0R$ et $|X_0Q$, $\sphericalangle RX_0Q$ est obtus. On peut trouver un point P_1 entre X_0 et P tel que $|\sphericalangle RX_0Q - \sphericalangle RP_1Q| < \sphericalangle RX_0Q - \frac{\pi}{2}$ (§ 166). $\sphericalangle RP_1Q$ est alors obtus; il y a donc une semi-droite issue de P_1 située entre $|P_1R$ et $|P_1Q$ qui fait avec $|P_1R$ un angle droit. Cette semi-droite coupe (X_0Q). Le support de cette semi-droite coupe donc (X_0Y_0) ou (Y_0Q). Il ne peut couper (X_0Y_0), comme il est perpendiculaire à *a*. Il coupe donc (Y_0Q). Soit Q_1 le point d'intersection. On voit maintenant aisément que la perpendiculaire élevée à *a* dans le plan *ab* en un point X situé entre X_0 et P_1 coupe *b* en un point Y situé entre Y_0 et Q_1. Les fonctions BY et $\sphericalangle$ BYX de AX sont donc définies pour $AP_1 \leqslant AX \leqslant AX_0$.

On montre de la même façon que ces fonctions sont définies pour les valeurs de AX supérieures à AX_0 et suffisamment voisines de AX_0.

Prenons maintenant X entre X_0 et P_1. Soit Y_1 un point quelconque situé entre Y_0 et Q_1. On a $\sphericalangle Y_1X_0P_1 < \frac{\pi}{2}$ et $\sphericalangle Y_1P_1X_0 < \frac{\pi}{2}$. Il y a donc un point X_1 entre X_0 et P_1 tel que X_1Y_1 est perpendiculaire à AX_0 (§ 168). Si maintenant on a $AX_1 < AX < AX_0$, BY restera compris entre BY_1 et BY_0. On a donc $\lim_{AX \gtrless AX_0} BY = BY_0$.

Y_0YXX_0 est un quadrilatère (§ 62). $|YX_0$ est entre $|YY_0$ et $|YX$; $|YX$ est entre $|YX_0$ et $|YQ_1$. On a maintenant

$$\sphericalangle Q_1YX = \sphericalangle Q_1YX_0 - \sphericalangle XYX_0,$$
$$\lim_{AX \gtrless AX_0} \sphericalangle Q_1YX_0 = \sphericalangle Q_1Y_0X_0 \quad (\S\ 165),$$
$$\lim_{AX \gtrless AX_0} \sphericalangle XYX_0 = 0 \quad (\S\ 164),$$
$$\lim_{AX \gtrless AX_0} \sphericalangle Q_1YX = \sphericalangle Q_1Y_0X_0.$$

B est extérieur au segment (Y_0Y). On a donc à la fois $\sphericalangle BYX = \sphericalangle Q_1YX$ et $\sphericalangle BY_0X_0 = \sphericalangle Q_1Y_0X_0$ ou bien

$\sphericalangle BYX = \pi - \sphericalangle Q_1YX$ et $\sphericalangle BY_0X_0 = \pi - \sphericalangle Q_1Y_0X_0$.
On a donc dans tous les cas

$$\lim_{AX \overset{\to}{<} AX_0} \sphericalangle BYX = \sphericalangle BY_0X_0.$$

On démontre de la même manière qu'on a $\lim_{AX \overset{\to}{>} AX_0} BY = BY_0$ et $\lim_{AX \overset{\to}{>} AX_0} \sphericalangle BYX = \sphericalangle BY_0X_0$. Les fonctions BY et $\sphericalangle BYX$ de AX sont donc continues pour $AX = AX_0$. On démontre exactement de la même façon qu'elles sont continues pour une autre valeur quelconque de la variable indépendante pour laquelle elles sont définies.

Les différents points à établir sont donc démontrés dans le deuxième cas également.

Examinons finalement le sens de variation de BY dans un intervalle où cette fonction est définie. On démontre aisément, en raisonnant comme au § 162, que lorsque BY ne varie pas dans le même sens quand AX croît continûment depuis la limite inférieure de l'intervalle jusqu'à sa limite supérieure, il existe deux valeurs différentes de AX appartenant à l'intervalle auxquelles répond la même valeur de BY. Il y a donc deux positions distinctes de X auxquelles répond la même position de Y. Cette position de Y répond donc à toutes les positions de X (§ 167) et BY est constant. Le théorème est ainsi complètement établi.

170. Théorème. *Supposons données deux semi-droites a et b, issues de* A *et* B, *appartenant à des droites différentes non perpendiculaires entre elles situées dans un même plan. Supposons que les perpendiculaires élevées à a en deux points distincts dans le plan ab ne se coupent jamais sur b. Soit* Y *un point quelconque de b non situé sur a tel que par* Y *il passe une droite coupant a et perpendiculaire à a, et soit* X *le point d'intersection d'une telle droite passant par* Y *avec a. Si la fonction* AX *de* BY *est définie pour une valeur particulière y_0 de* BY, *elle est définie dans un intervalle suffisamment petit comprenant y_0 dans son intérieur, et cette fonction est*

uniforme et continue pour toutes les valeurs de BY *pour lesquelles elle est définie. Si la fonction* AX *de* BY *est définie pour toutes les valeurs de* BY *appartenant à un intervalle, elle est toujours croissante ou toujours décroissante dans cet intervalle.*

Démonstration. Ce théor. se déduit facilement du § 169.

171. Théorème. *Etant donné un angle aigu* $\sphericalangle$ ACB, *on peut trouver sur* | CB *un point* B′ *distinct de* C *jouissant des propriétés suivantes : si* X *est un point de* (CB′) *distinct de* C, *la perpendiculaire élevée en* X *à* CB *dans le plan* ACB *coupe* | CA ; *si* Y *désigne le point d'intersection de cette perpendiculaire avec* | CA, *la fonction* CY *de* CX *est uniforme, continue et croissante pour* $0 < CX \leq CB'$; *on a* $\lim\limits_{CX \gtrsim 0} CY = 0$.

Démonstration. Il y a un point A′ sur | CA assez rapproché de C pourque $\sphericalangle$ A′BC soit aigu. On peut abaisser de A′ la perpendiculaire sur CB et son pied B′ est entre C et B (§ 168). Soit X un point distinct de C situé sur (CB′). Elevons en X la perpendiculaire à CB dans le plan ACB. Cette perpendiculaire coupe (CA′) ou (A′B′). Si elle coupait (A′B′) en Z, ZC serait perpendiculaire à BC, ce qui est impossible puisque $\sphericalangle$ ZCB < $\sphericalangle$ ACB, qui est aigu. Donc, la perpendiculaire élevée en X à CB dans le plan ACB coupe (CA′), c. à d. | CA.

Cela étant, on démontre aisément que B′ jouit des autres propriétés énumérées dans l'énoncé.

172. Théorème. *Etant donné un angle aigu* $\sphericalangle$ ACB, *on peut trouver sur* | CA *un point* A′ *distinct de* C *jouissant des propriétés suivantes : si* Y *est un point de* (CA′) *distinct de* C, *il passe une droite par* Y *qui est perpendiculaire à* CB *en un point* X *de* | CB ; *la fonction* CX *de* CY *est uniforme, continue et croissante pour* $0 < CY < CA'$; *on a* $\lim\limits_{CY \gtrsim 0} CX = 0$.

Démonstration. On montre aisément que le point A′ dont il est question au § 171 jouit des différentes propriétés énumérées dans l'énoncé.

173. Théorème. *Etant donnés un point* O *et un plan* π *passant par* O, *il existe un nombre positif* α *jouissant de la propriété suivante: si* P *est un point de* π *tel que* $OP < \alpha$, *on peut abaisser de* P *une perpendiculaire et une seule sur chaque droite passant dans* π *par* O.

Démonstration. Il existe un nombre positif β tel que sur toute semi-droite issue de O et appartenant à π se trouve un point A pour lequel on a $OA = \beta$ (§ 154). Menons dans π une semi-droite fixe *a* issue de O. Sur *a* il y a un point A_1 tel que $OA_1 = \beta$. Sur la perpendiculaire élevée en O dans π à *a* il y a un point B_1 tel que $OB_1 = \beta$. Il y a un nombre positif α inférieur à la mesure de tout segment déterminé par O et un point de (A_1B_1) (§ 153). Montrons que α satisfait à la question.

Soient P un point de π tel que $OP < \alpha$ et *d* une droite de π passant par O. Il y a sur *d* deux points D_1 et D_2 situés de part et d'autre de O tels que $OD_1 = OD_2 = \beta$; sur la perpendiculaire élevée en O dans π à *d* il y a de part et d'autre de O deux points E_1 et E_2 tels que $OE_1 = OE_2 = \beta$. Les triangles OD_1E_1, OE_1D_2, OD_2E_2, OE_2D_1 ont chacun leurs côtés et leurs angles congruents chacun à chacun à ceux du triangle OA_1B_1. $\sphericalangle OD_1E_1$, $\sphericalangle OD_2E_1$, $\sphericalangle OD_1E_2$, $\sphericalangle OD_2E_2$ sont aigus (§§ 152 et 156) et α est inférieur à la mesure de tout segment déterminé par O et par un point de (D_1E_1), (E_1D_2), (D_2E_2) ou (E_2D_1). P est sur (D_1D_2), intérieur à $D_1D_2E_1$ ou intérieur à $D_1D_2E_2$. Si P est sur (D_1D_2), la perpendiculaire abaissée de P sur *d* n'est autre que la perpendiculaire élevée en P à *d*. Supposons P intérieur à $D_1D_2E_1$. Menons PD_1 et PD_2. $\sphericalangle PD_1D_2$ et $\sphericalangle PD_2D_1$ sont aigus; il y a un point entre D_1 et D_2 déterminant avec P une droite perpendiculaire à *d* (§ 168). Il n'existe de plus aucun autre point sur *d* déterminant avec P une droite perpendiculaire à *d* (§ 167). De même, si P est intérieur à $D_1D_2E_2$, on peut abaisser une perpendiculaire et une seule de P sur *d*. Le théorème est ainsi complètement établi.

174. Théorème. *Supposons donnés deux points distincts* A *et* C, *un point* B *situé entre* A *et* C, *et trois semi-droites*

a, b et c issues respectivement de A, *de* B *et de* C, *situées dans un même plan, n'appartenant pas à* AC, *et situées d'un même côté de* AC. *Soient* X *un point quelconque de a,* Z *un point quelconque de c, et* Z' *un point de c tel que* Z *soit entre* C *et* Z'. *Si* AX *et* CZ *sont assez petits,* XZ *coupe b; si* Y *désigne le point d'intersection, on a* $\lim_{\substack{AX \gtreqless 0 \\ CZ \gtreqless 0}} BY = 0$; *on a enfin* $\lim_{\substack{AX \gtreqless 0 \\ CZ \gtreqless 0}} \sphericalangle Z'ZX = \sphericalangle Z'CA$.

Démonstration. On montre que le point Y existe et que l'on a $\lim_{\substack{AX \gtreqless 0 \\ CZ \gtreqless 0}} BY = 0$ en raisonnant comme nous l'avons fait au § 155 pour montrer que $\lim_{n=+\infty} OC'_n = \lim_{n=+\infty} NB'_{n-1} = 0$ (fig. 2). Pour démontrer qu'on a $\lim_{\substack{AX \gtreqless 0 \\ CZ \gtreqless 0}} \sphericalangle Z'ZX = \sphericalangle Z'CA$, on raisonne exactement comme dans la démonstration du § 169.

175. Théorème. *Supposons donnés un point* O *et deux droites a et p passant par* O *et perpendiculaires entre elles; supposons donnés sur p deux points* N *et* P, *tels que* O *soit entre* N *et* P *et que* ON = OP. *Si* A *est un point quelconque de a distinct de* O, *on a* NA > NO *et l'angle* $\sphericalangle$ NAO *est aigu; si* A *et* B *sont deux points quelconques de a tels que* OB > OA, *on a* NB > NA.

Démonstration. Supposons A et B situés sur *a* du même côté de O. Alors A est entre O et B. Menons PA et PB. A et B ne sont pas situés sur *p*, et A est intérieur au triangle NBP. On a

$$NP < NA + AP \quad (\S\ 157),$$
$$NA + AP < NB + BP \quad (\S\ 158),$$
$$2NO < 2NA,$$
$$2NA < 2NB,$$
$$NO < NA < NB, \quad \sphericalangle NAO < \sphericalangle NOA \quad (\S\ 156).$$

C. q. f. d.

Le cas où A et B sont situés de côtés différents de O se traite ensuite sans la moindre difficulté.

176. Théorème. *Supposons donnés un point* O *et deux droites passant par* O *et perpendiculaires entre elles; supposons donnés sur la première droite deux points* N *et* P *situés de part et d'autre de* O *tels que* ON = OP; *supposons donnés sur la seconde droite trois points* A, B *et* A′ *tels que* O *soit entre* B *et* A′ *et* A *entre* O *et* B *et tels que* OA = OA′. *Alors on a* ∢ NAO > ∢ NBO.

Démonstration. Supposons que l'on ait ∢ NAO = ∢ NBO. Il y a un point N′ entre N et B tel que N′B = NA (§ 175). Il y a un point O′ entre O et B tel que O′B = OA. En comparant les triangles NOA et N′O′B, on voit que N′O′ est perpendiculaire à BA′ et que N′O′ = NO. N′O′ ne peut passer par un point de (NO) ni NO par un point de (N′O′); cela se déduit aisément de l'existence du point P. NOO′N′ est donc un quadrilatère birectangle isoscèle (§ 62). Soient O″ le milieu de (OO′) et N″ celui de (NN′). ∢ O″N″B et ∢ N″O″B seront droits (§ 65). On a O″A′ = O″B. En comparant les triangles A′O″N″ et BO″N″, on voit que ∢ A′N″O″ sera aussi droit, ce qui est impossible. On n'a donc pas ∢ NAO = ∢ NBO.

Supposons ∢ NAO < ∢ NBO. Si un point X se meut continûment de A vers O, ∢ NXO variera continûment de ∢ NAO à ∢ NOA′ ou $\frac{\pi}{2}$ et passera nécessairement pour une position particulière de X par la valeur ∢ NBO qui est comprise entre ∢ NAO et $\frac{\pi}{2}$. Or, on ne peut avoir ∢ NXO = ∢ NBO quand X est entre O et A, d'après ce qui a été établi. On n'a donc pas ∢ NAO < ∢ NBO. On a donc ∢ NAO > ∢ NBO. C. q. f. d.

177. Théorème. *Dans tout polygone la mesure d'un côté tel que tous les sommets du polygone ne soient pas en ligne droite avec les deux sommets qui limitent ce côté est plus petite que la somme des mesures des autres côtés.*

Démonstration. Ce théorème se déduit facilement du § 157 par passage de n à $n + 1$.

CHAPITRE VI.

Transformations congruentes.

178. Définitions. Dans ce chapitre, nous aurons souvent à considérer des ensembles de points. Nous désignerons en général un tel ensemble par une lettre majuscule placée entre parenthèses. Etant donnés deux ensembles de points (A) et (B), nous désignerons par (A) + (B) l'ensemble de points comprenant à la fois tous les points de (A) et tous ceux de (B); si en particulier (A) et (B) ont des éléments communs, (A) + (B) désignera l'ensemble de tous les points de (A) et des points de (B) n'appartenant pas à (A).

Supposons donné un ensemble de points quelconque (E). Effectuer sur (E) une *transformation,* c'est faire correspondre à chaque point de (E) par une loi quelconque un nouveau point. Nous considérerons ici seulement des transformations telles que le nouveau point correspondant à un point quelconque donné de (E) est toujours univoquement déterminé, c. à d. qu'à un point de (E) ne correspond qu'un seul nouveau point.

Etant donné un ensemble (E) et une transformation effectuée sur (E), nous désignerons en général l'ensemble des points correspondant aux différents points de (E) par (E′), c. à d. par le symbole servant à indiquer l'ensemble sur lequel s'effectue la transformation, où la lettre majuscule est affectée d'un accent. Nous désignerons la transformation par laquelle on passe de (E) à (E′) par (E) ··· (E′). Pour que cette notation ait un sens, il faut donc qu'une loi soit donnée qui fait correspondre à chaque point de (E) un nouveau point bien déterminé, que ce nouveau point appartienne toujours à (E′) et que (E′)

ne contienne pas d'autres points que ceux qui correspondent aux différents points de (E).

Lorsque la loi qui fait correspondre à chaque point de (E) un point de (E′) est indiquée par le contexte avec toute la clarté désirable, nous ne l'énoncerons pas expressément et nous parlerons sans plus de la transformation (E) ... (E′).

Supposons donnée une transformation (E) ··· (E′). Soient A, B deux points quelconques distincts de (E) et A′, B′ leurs correspondants dans (E′). Si A′ et B′ sont toujours distincts et si l'on a toujours (AB) ≡ (A′B′), la transformation donnée est dite *congruente*.

On voit aisément que si (E) ··· (E′) est une transformation congruente, et A′ un point quelconque de (E′), il existe dans (E) un point et un seul A tel que A′ corresponde à A dans la transformation. Il en résulte que la transformation congruente fait correspondre à chaque point de (E) un point et un seul de (E′) et à chaque point de (E′) un point et un seul de (E). On voit immédiatement que la transformation (E′) ··· (E) est aussi congruente.

Deux points de (E) et de (E′) qui se correspondent dans une transformation congruente (E) ··· (E′) sont dits aussi *homologues* dans cette transformation.

Il est facile de donner des exemples de transformations congruentes.

La transformation identique (E) ··· (E) qui fait correspondre à chaque point de (E) ce point même est évidemment congruente.

Supposons que pour deux triangles ABC et A′B′C′ on ait (AB) ≡ (A′B′), (BC) ≡ (B′C′) et (CA) ≡ (C′A′). Faisons correspondre le point A′ au point A, le point B′ à B et C′ à C. La transformation (A, B, C) ··· (A′, B′, C′) ainsi obtenue est congruente.

Prenons, comme dernier exemple, deux semi-droites *a* et *a*′ issues de O et de O′. Soit (A) l'ensemble des points A sur *a* auxquels correspondent des points A′ sur *a*′ tels que (OA) ≡ (O′A′); (A) comprend une infinité de points; soit (A′) l'ensemble des points A′ sur *a*′ qui

correspondent ainsi aux différents points de (A). La transformation (A) ··· (A′) est congruente.

179. Théorème. *Si les transformations* (E) ··· (E′) *et* (E′) ··· (E″) *sont congruentes, la transformation* (E) ·· (E″) *est congruente.*

180. Théorème. *Si trois points sont en ligne droite, leurs homologues dans une transformation congruente sont en ligne droite.*

Démonstration. Soient A, B et C les trois points, A′, B′ et C′ leurs homologues, et B celui des points A, B, C qui est entre les deux autres. Si A′, B′ et C′ n'étaient pas en ligne droite, on aurait $A'C' < A'B' + B'C'$ (§ 157). Or, on a $A'C' = AC = AB + BC = A'B' + B'C'$.

Définition. Si dans une transformation congruente deux points distincts A et B sont transformés en deux points A′ et B′, alors nous dirons que les droites AB et A′B′ se *correspondent* ou sont *homologues* dans la transformation.

181. Théorème. *Si quatre points sont dans un même plan, leurs homologues dans une transformation congruente sont dans un même plan.*

Démonstration. Soient A, B, C et D quatre points situés dans un même plan et A′, B′, C′ et D′ leurs homologues dans une transformation congruente. Si trois des quatre premiers points sont en ligne droite, le théorème à démontrer résulte du § 180. Si trois quelconques des quatre premiers points ne sont pas en ligne droite, considérons le triangle ABC. Ou bien il existe un sommet de ce triangle tel que D et ce sommet soient situés de côtés différents du support du côté opposé, ou bien cela n'est pas le cas. Si la première éventualité se présente, soit B le sommet qui jouit de la propriété en question ; AC coupera alors BD entre B et D ; si la seconde éventualité se présente, D et C sont situés du même côté de AB, D et A du même côté de BC, D est intérieur à $\sphericalangle ABC$ et BD coupe AC entre A et C. On peut donc toujours choisir deux points, par exemple B et D, parmi les quatre points A, B, C et D tels que BD coupe le segment déter-

miné par les deux autres points A et C; soit E le point d'intersection. Il existe un point E′ entre A′ et C′ tel que (AE)≡(A′E′) et (EC)≡(E′C′) (§ 42). On voit aisément qu'on a (EB)≡(E′B′), ∢ ECD ≡ ∢ E′C′D′ (§ 50), (ED)≡(E′D′) La transformation

(B, D, E) ⋯ (B′, D′, E′)

est donc congruente, D′ se trouve sur la droite B′E′ (§ 180), et aussi dans le plan A′B′C′. C. q. f. d.

Définition. Si dans une transformation congruente trois points non en ligne droite A, B et C sont transformés en trois points A′, B′ et C′, nous dirons que les plans ABC et A′B′C′ se *correspondent* ou sont *homologues* dans la transformation.

182. Théorème. *Si trois points* A, B *et* C *sont en ligne droite, si* B *est entre* A *et* C, *et si* A′, B′ *et* C′ *sont les homologues de* A, B *et* C *dans une transformation congruente,* B′ *est entre* A′ *et* C′.

Démonstration. Le théorème résulte du § 43

Définition. Si dans une transformation congruente deux points distincts A et B sont transformés en deux points A′ et B′, nous dirons que les segments (AB), (A′B′) et les semi-droites |AB, |A′B′ se *correspondent* ou sont *homologues* dans la transformation.

183. Théorème. *Si a et b sont deux semi-droites formant un angle, et si ces semi-droites ont comme homologues a' et b' dans une transformation congruente les angles (a, b) et (a', b') sont congruents.*

Démonstration. Soit O l'origine commune de a et de b; a' et b' auront une origine commune O′, homologue de O dans la transformation, et il existe un point A sur a et un point B sur b ayant pour homologues deux points A′ et B′ situés respectivement sur a' et b' (§ 182). On a (AB)≡(A′B′), (BO)≡(B′O′) et (OA)≡(O′A′) (§ 178); on a donc ∢ AOB ≡ ∢ A′O′B′ (§ 50), c. à d. $(a, b) \equiv (a', b')$.

C. q. f. d.

184. Théorème. *Si a est une droite et si* A *et* B *sont deux points situés dans un même plan avec a, et si a',* A′ *et* B′ *sont les homologues de a,* A *et* B *dans une trans*

formation congruente, A′ *et* B′ *seront situés du même côté ou de côtés différents de* a' *suivant que* A *et* B *sont du même côté ou de côtés différents de* a.

Définition. Si dans une transformation congruente une droite a et un point A non situé sur a sont transformés en une droite a' et un point A′, nous dirons que les demi-plans limités à a et à a' contenant les points A et A′ se *correspondent* ou sont *homologues* dans la transformation.

185. Théorème. *Si les homologues d'un plan* α *et de deux points* A *et* B *dans une transformation congruente sont* α', A′ *et* B′, A′ *et* B′ *seront situés du même côté de* α' *ou de côtés différents suivant que* A *et* B *sont situés du même côté ou de côtés différents de* α.

Définition. Si dans une transformation congruente un plan α et un point A non situé dans α sont transformés en un plan α' et en un point A′, nous dirons que le côté du plan α' répondant au point A′ *correspond* au ou est *homologue* du côté du plan α répondant au point A.

186. Théorème. *Supposons donnée une transformation congruente* (E) ⋯ (E′). *Soient* O *un point quelconque de* (E), O′ *son homologue dans* (E′) *et* s *une semi-droite quelconque issue de* O. *Il existe au moins une semi-droite* s' *issue de* O′ *jouissant de la propriété suivante : soit* (S) *l'ensemble des points* S *sur* s *auxquels correspondent des points* S′ *sur* s' *tels que* (OS)≡(O′S′); *soit* (S′) *l'ensemble des points sur* s' *qui correspondent ainsi aux différents points de* (S); *si un point appartient à la fois à* (E) *et à* (S), *il a le même transformé dans les transformations* (S) ⋯ (S′) *et* (E) ⋯ (E′); *la transformation* (E) + (S) ⋯ (E′) + (S′) *est congruente.*

Démonstration. S'il y a dans (E) un point A au moins autre que O situé sur s, on montre sans la moindre difficulté qu'il suffit de prendre pour s' la semi-droite |O′A′. A′ désignant l'homologue de A dans (E′). Si s ne contient aucun point de (E) autre que O, on peut établir le théorème en distinguant les cas suivants.

1°) L'ensemble (E) ne comprend que le point O. Il suffit de prendre pour s' une semi-droite quelconque issue de O′; nous avons alors à faire au dernier exemple du § 178.

2°) L'ensemble (E) comprend au moins un point A distinct de O et tous les points de (E) sont situés sur OA. Désignons par A′ l'homologue de A dans (E′). On voit aisément qu'il suffit de prendre pour s' une semi-droite quelconque issue de O′ telle que (|OA, s) ≡ (|O′A′, s') ou, si |OA et s sont opposées, la semi-droite opposée à |O′A′.

3°) L'ensemble (E) comprend au moins un point A distinct de O et un point B non situé sur OA. Désignons par A′ et B′ les homologues de A et de B dans (E′).

a) s est situé dans le plan OAB. Supposons par exemple que s soit situé du côté opposé à celui de B par rapport à OA. Prenons pour s' la semi-droite issue de O′ située dans le plan O′A′B′ du côté opposé à celui de B′ par rapport à O′A′ et telle que (|OA, s) ≡ (|O′A′, s').

Il s'agit de montrer que la transformation (E) + (S) . . (E′) + (S′) est congruente. Prenons deux points quelconques dans (E) + (S) Il faut montrer que le segment qu'ils déterminent est congruent au segment déterminé par leurs homologues dans (E′) + (S′). Il est évident qu'il en sera ainsi si les deux points de (E) + (S) appartiennent tous les deux à (E) ou tous les deux à (S). Reste le cas où l'un appartient à (E) et l'autre à (S).

Soient C un point quelconque de (E) situé dans le plan OAB et éventuellement F un point quelconque de (E) non situé dans ce plan. Soient C′ et F′ les homologues de C et de F. Nous allons montrer successivement qu'on a (CS) ≡ (C′S′) et (FS) ≡ (F′S′). Alors il sera établi que s' satisfait à la question.

Soient a_1, a'_1, s_1 et s'_1 les semi-droites respectivement opposées à |OA, |O′A′, s et s'. |OC est en général intérieur à l'un des angles (s, |OA), (|OA, s_1), (s_1, a_1) ou (a_1, s). Supposons par exemple |OC intérieur à (a_1, s_1). C′ est situé dans le plan O′A′B′ (§ 181) et |O′C′ sera situé du même côté de O′A′ que s'_1 (§ 184). On a (|O′C′, |O′A′) ≡ (|OC, |OA) (§ 183) > (s_1, |OA) ≡ (s'_1, |O′A′) (§ 40). s'_1 sera donc entre |O′A′ et |O′C′, |O′C′ sera entre s'_1 et a'_1. On a ensuite ∢ S′O′C′ ≡ (s', a'_1) + (a'_1, |O′C′) ≡ (s, a_1) + (a_1, |OC) ≡ ∢ SOC. D'où il résulte que (SC) ≡ (S′C′).

F' sera situé en dehors du plan $O'A'B'$ (§ 181). On voit à peu près comme au § 181 qu'on pourra partager les quatre points O, A, B et S en deux couples tels que la droite déterminée par l'un des couples coupe le segment déterminé par l'autre. Supposons que B et S forment l'un des couples; cette hypothèse ne restreint en rien la généralité de la démonstration, puisqu'il résulte de ce qui a été établi que les points O, A et B jouent exactement le même rôle vis-à-vis de S. Soit D le point d'intersection de OA et BS. D sera entre O et A ou entre B et S, ces deux éventualités pouvant aussi se présenter à la fois. Désignons, si D est entre O et A, par D' le point de $(O'A')$ tel que $(OD) \equiv (O'D')$; désignons, si D est entre B et S, par D' le point de $(B'S')$ tel que $(BD) \equiv (B'D')$. On voit aisément que la transformation $(O, A, B, S, D) \cdots (O', A', B', S', D')$ sera congruente, et que D' sera à l'intersection de $O'A'$ et de $B'S'$. On a maintenant $(AF) \equiv (A'F')$, $(AD) \equiv (A'D')$, $\sphericalangle DAF \equiv \sphericalangle D'A'F'$ et par conséquent $(FD) \equiv (F'D')$. On a ensuite $(BF) \equiv (B'F')$, $(BD) \equiv (B'D')$, et donc $\sphericalangle FDB \equiv \sphericalangle F'D'B'$ et aussi $\sphericalangle SDF \equiv \sphericalangle S'D'F'$. Comme on a $(DS) \equiv (D'S')$, on déduit de la considération des triangles FDS et $F'D'S'$ qu'on a $(FS) \equiv (F'S')$.

s' satisfait donc à la question.

b) s n'est pas situé dans le plan OAB. Ou bien il y a des points dans (E) qui sont situés en dehors du plan OAB, ou bien tous les points de (E) sont situés dans ce plan.

Prenons, si ce dernier cas se présente, sur les perpendiculaires élevées en A et A' aux plans OAB et $O'A'B'$ deux points F et F' tels que $(AF) \equiv (A'F')$. Faisons correspondre le point F' au point F. On voit immédiatement que la transformation $(E) + F \cdots (E') + F'$ est congruente. On peut donc toujours réduire le second cas au premier et nous pouvons supposer sans restreindre la généralité de la démonstration que (E) contient un point F non situé dans le plan OAB. L'homologue F' de F sera extérieur au plan $O'A'B'$.

Le plan déterminé par s et F coupe le plan OAB suivant une droite passant par O. Soit r l'une des deux

semi-droites en lesquelles O partage cette droite. Il existe une semi-droite r' issue de O′ telle que, si R et R′ sont deux points de r et de r' pour lesquels on a $(OR) \equiv (O'R')$, la transformation $(E) + R \cdots (E') + R'$ est congruente (§ 186, 3°, *a*).

Les points O, R et F ne sont pas situés en ligne droite et s est situé dans le plan ORF. Il existe donc une semi-droite s' issue de O′ telle que la transformation $(E) + R + (S) \cdots (E') + R' + (S')$ est congruente (§ 186, 3°, *a*). En particulier la transformation $(E) + (S) \cdots (E') + (S')$ est congruente, et s' satisfait à la question.

Le théorème est ainsi complètement établi. (1)

187. Théorème. *Supposons données deux droites a et a′, deux semi-droites b et b′ supportées respectivement par a et a′, et un point* P *sur a. Dans toutes les transformations congruentes qui portent b en b′ et dans lesquelles* P *a un homologue, l'homologue de* P *est le même.*

188. Théorème. *Supposons donnés deux plans α et α′, deux semi-droites b et b′ situées respectivement dans α et α′, deux demi-plans β et β′ supportés par α et α′ et limités aux supports de b et de b′, et enfin un point* P *dans α. Dans toutes les transformations congruentes qui portent b en b′ et β en β′ et dans lesquelles le point* P *a un homologue, l'homologue de* P *est le même.*

Démonstration. Soit P′ l'homologue de P dans l'une quelconque des transformations en question. Soient O l'origine de b et O′ celle de b'. |O′P′ est situé dans α′ (§ 181), c. à d dans un plan fixe. |O′P′ est situé dans β′ ou dans le demi-plan opposé suivant que P est dans β ou dans le demi-plan opposé (§ 184); |O′P′ se trouve donc dans un demi-plan fixe. De plus on a $(|OP, b) \equiv (|O'P', b')$ (§ 183). |O′P′ est donc déterminé (§ 10, postulat III 4). On a $(OP) \equiv (O'P')$. P′ est donc déterminé (§ 10, postulat III 1).

189. Théorème. *Supposons donnés deux semi-droites b et b′, deux demi-plans β et β′ limités aux supports de*

(1) Chez M. Coolidge (l. c. p. 29) le théorème du § 186 est un postulat. M. Coolidge emploie d'ailleurs un système de postulats assez différent, quant à la forme, de celui de M. Hilbert, qui nous a servi de point de départ ici. Néamoins le système de M. Coolidge est équivalent à celui du § 10.

b et de b', un côté Σ du support de β et un côté Σ' du support de β', et enfin un point quelconque P. *Dans toutes les transformations congruentes qui portent b en b', β en β' et Σ en Σ', et dans lesquelles le point* P *a un homologue, l'homologue de* P *est le même.*

Démonstration. Soient (E) .. (E′) l'une quelconque des transformations en question et P′ l'homologue de P dans cette transformation. Il y a un point B sur *b* et un point B′ sur *b*′ tels que la transformation (E) ... (E′) porte B en B′. Soient O et O′ les origines de *b* et de *b*′. (E) ... (E′) porte O en O′.

Si P est situé dans le plan qui supporte β, le théorème est une conséquence immédiate du § 188.

Si OP est normal au plan qui supporte β, le théorème se déduit aisément du fait qu'en O′ on ne peut élever qu'une perpendiculaire à β′ (§ 70).

Il reste le cas où P n'est pas dans le plan qui supporte β et où OP n'est pas normal à ce plan. Soit *n* la semi-droite issue de O qui est située du même côté du support de β que P et qui est normale à β. P n'est pas sur *n*. Le plan déterminé par *n* et par P coupe le support de β suivant une droite passant par O. Soit *r* celle des deux semi-droites en lesquelles O partage cette droite qui est située du même côté que P du support de *n*.

|OP est entre *r* et *n* et (*r*, |OP) est aigu. Il existe donc un point R sur *r* tel que la perpendiculaire élevée en R à *r* dans le plan *rn* coupe |OP en un point Q situé entre O et P (§ 171). On peut de plus prendre R assez près de O pour que sur toute semi-droite issue de O′ dans le support de β′ existe un point déterminant avec O′ un segment congruent à (OR) (§ 154).

Il y a un point Q′ entre O′ et P′ tel que (OQ) ≡ (O′Q′) et la transformation (E) + Q ··· (E′) + Q′ est congruente. Il existe une semi-droite *r*′ issue de O′ dans le support de β′ telle que, R′ désignant le point de *r*′ pour lequel on a (OR) ≡ (O′R′), la transformation

$$(E) + Q + R \cdots (E') + Q' + R'$$

soit congruente (§ 186).

QR est perpendiculaire au support de β (§ 77), ∢BRQ est droit. On a ∢B′R′Q′ ≡ ∢BRQ et ∢O′R′Q′ ≡ ∢ORQ (§ 183). Q′R′ est donc perpendiculaire à β′. Une fois le point R choisi, le point R′ est déterminé (§ 188). La droite R′Q′ est déterminée. Le point Q′ est sur R′Q′ du côté Σ′ ou du côté opposé suivant que P est du côté Σ ou du côté opposé. Q′ est donc sur R′Q′ d'un côté déterminé de R′. On a (RQ) ≡ (R′Q′), Q′ est donc déterminé. Il en résulte que P′ est déterminé. C. q. f. d.

190. Théorème. *Supposons donnés deux semi-droites b et b′, deux semi-plans β et β′ limités aux supports de b et de b′, un côté Σ du support de β et un côté Σ′ du support de β′, et enfin deux transformations congruentes* (E) ··· (E′) *et* $(E_1) \cdots (E'_1)$ *qui toutes les deux portent b en b′, β en β′ et Σ en Σ′. Tout point commun à* (E) *et à* (E_1) *a le même homologue dans les deux transformations et la transformation* $(E) + (E_1) \cdots (E') + (E'_1)$ *est congruente.*

Démonstration. Un point commun à (E) et à (E_1) doit avoir le même homologue dans les deux transformations d'après le § 189.

Soient O et O′ les origines de *b* et de *b′*. O′ est l'homologue de O dans les deux transformations. Soient A un point quelconque de (E) n'appartenant pas à (E_1) et A′ son homologue et soient A_1 un point quelconque de (E_1) n'appartenant pas à (E) et A'_1 son homologue. Pour démontrer complètement le théorème, il suffira de prouver que $(AA_1) \equiv (A'A'_1)$.

Considérons la semi-droite |OA. En vertu du § 186, on peut y faire correspondre au moyen de la transformation $(E_1) \cdots (E'_1)$ une semi-droite s'_1 issue de O′. Prenons sur OA un point P situé entre O et A tel qu'il existe sur s'_1 un point P'_1 pour lequel on a $(OP) \equiv (O'P'_1)$. Soit P′ le point de (O′A′) tel que (OP) ≡ (O′P′). Les transformations (E)+P···(E′)+P′ et $(E_1)+P \cdots (E'_1)+P'_1$ seront congruentes. $P_1{}'$ coïncide avec P′ (§ 189). A′ est donc sur s'_1; comme de plus (OA) ≡ (O′A′), la transformation $(E_1) + A \ldots (E'_1) + A'$ est congruente (§ 186). On a donc $(AA_1) \equiv (A'A'_1)$. C. q. f. d.

191. Conventions. Etant donnée une transformation congruente, il est toujours possible, d'une ou de plusieurs manières, d'étendre cette transformation à de nouveaux points de façon à obtenir une transformation congruente $(E) \cdots (E')$ dans laquelle l'ensemble (E) comprend au moins quatre points non situés dans un même plan. Cela résulte du § 186. Désormais nous supposerons, chaque fois que nous considérons une transformation congruente, que cette extension ait été faite. Moyennant cette convention, nous pouvons affirmer ce qui suit : supposons donnés une transformation congruente quelconque $(E) \cdots (E')$ et un point P n'appartenant pas à (E) ; s'il existe un point P' tel que la transformation $(E) + P \cdots (E') + P'$ soit congruente, le point P' est unique ; cela résulte du § 189. En d'autres mots, les transformations congruentes telles que nous les considérerons dans l'avenir seront toujours déterminées.

Supposons données deux transformations congruentes qui toutes les deux transforment une semi-droite b en une même semi-droite b', un demi-plan β limité au support de b en un même demi-plan β' limité au support de b', et un côté du support de β en un même côté du support de β'. Si dans l'une de ces transformations un point P a pour homologue P', on peut étendre l'autre à P, et P' y sera aussi l'homologue de P (§ 190). A cause de cela, nous considérerons ces deux transformations congruentes comme une seule et même transformation congruente, même si elles portent sur des ensembles de points en partie différents.

192. Théorème. *Supposons donnés deux semi-droites quelconques b et b', deux demi-plans quelconques β et β' limités aux supports de b et de b', un côté quelconque Σ du support de β et un côté quelconque Σ' du support de β'. Il existe une transformation congruente et une seule transformant b en b', β en β' et Σ en Σ'.*

Démonstration. Soient O et O' les origines de b et de b'. Prenons sur b et b' deux points B et B' tels que $(OB) \equiv (O'B')$. Soient c et c' les semi-droites issues de O et O', perpendiculaires à OB et à $O'B'$, et qui sont situées res-

pectivement dans β et β′. Prenons sur *c* et *c*′ deux points C et C′ tels que (OC) ≡ (O′C′). Soient *d* et *d*′ les semi-droites issues de O et O′, situées dans Σ et Σ′, et perpendiculaires aux plans OBC et O′B′C′. Prenons sur *d* et *d*′ deux points D et D′ tels que (OD) ≡ (O′D′). La transformation

(O, B, C, D) ... (O′, B′, C′, D′)

est congruente et satisfait à la question.

Elle est unique d'après la convention du § 191.

193. Théorème. *Etant donnée une transformation congruente qui porte deux points distincts* A *et* B *en deux points* A′ *et* B′, *elle transforme tous les points du segment* (AB) *en ceux du segment* (A′B′).

Démonstration. Soit (E)...(E′) la transformation donnée. Elle porte une semi-droite *b* en une semi-droite *b*′, un demi-plan β limité au support de *b* en un demi-plan β′ limité au support de *b*′, et un côté Σ du support de β en un côté Σ′ du support de β′ (§ 191).

Il existe une semi-droite *s*′ issue de A′ telle que, S étant un point de | AB et S′ un point de *s*′ tel que (AS) ≡ (A′S′), la transformation (E) + S ... (E′) + S′ est congruente (§ 186). Mais la transformation (E) + S ... (E′) + S′ porte A en A′ et B en B′. S′ est donc sur A′B′ (§ 180), du même côté de A′ que B′ (§ 182). *s*′ coïncide donc avec | A′B′.

Soient C un point de (AB) et C′ le point de (A′B′) tel que (AC) ≡ (A′C′). La transformation (E) + C ... (E′) + C′ sera congruente, d'après ce qui vient d'être montré. Mais, la transformation (E) + C ..(E′) + C′ porte aussi *b* en *b*′, β en β′ et Σ en Σ′. Elle est donc identique à la transformation donnée (§ 191) et la transformation donnée porte donc bien C en C′.

194. Théorème. *Etant donnée une transformation congruente qui porte trois points non en ligne droite* A, B *et* C *en trois points* A′, B′ *et* C′, *elle transforme tous les points intérieurs au triangle* ABC *en ceux intérieurs au triangle* A′B′C′.

195. Théorème. *Si dans une transformation congruente tous les points d'une droite sont invariants, tout plan perpendiculaire à cette droite est transformé en lui-même.*

CHAPITRE VII.

Les trois hypothèses.

196. Théorème. *Supposons donné un quadrilatère birectangle. Elevons en un point intérieur au côté joignant les sommets des angles droits la perpendiculaire au support de ce côté dans le plan du quadrilatère. Cette perpendiculaire passe par un point intérieur au côté opposé.*

Démonstration. Soit ABCD un quadrilatère birectangle, les angles droits étant en A et B ; soit E un point situé entre A et B. Élevons en E la perpendiculaire à AB dans le plan ABCD. Cette perpendiculaire passe par un point de (BC), de (CD) ou de (DA) (§ 59). Si la perpendiculaire passait par un point de (BC), AD passerait par ce point (§ 167), et ABCD ne serait pas un quadrilatère (§ 57). De même, la perpendiculaire ne passe par aucun point de (DA). Elle passe donc par un point situé sur DC entre D et C. C. q. f. d.

197. Théorème. *Il existe des quadrilatères trirectangles.*

Démonstration. Le théorème résulte des §§ 64 et 65.

198. Théorème. *Tout quadrilatère birectangle dont les côtés opposés sont congruents entre eux est un rectangle et dans tout rectangle les côtés opposés sont congruents entre eux.*

Démonstration. Soit ABCD un quadrilatère. Supposons $\sphericalangle DAB = \sphericalangle CBA = \frac{\pi}{2}$, (DA) ≡ (CB), (DC) ≡ (AB). Soient M et N les milieux de (AB) et de (DC). $\sphericalangle$ AMN et $\sphericalangle$ DNM sont droits (§ 65), (DN) ≡ (AM). Dans les triangles DNM et AMN on a donc (AN) ≡ (DM). Dans les triangles NDA et MAD on a $\sphericalangle NDA \equiv \sphericalangle DAM$; donc, $\sphericalangle CDA = \frac{\pi}{2}$. Donc, $\sphericalangle DCB = \frac{\pi}{2}$ (§ 65), et ABCD est un rectangle.

Soit ensuite ABCD un rectangle. Démontrons par exemple que (AD) ≡ (BC). Soit M le milieu de (AB). Élevons en M dans le plan ABCD la perpendiculaire à AB. Elle coupe CD en N, entre C et D (§ 196). Supposons (AD) > (BC). Il y a un point D′ entre A et D tel que (AD′) ≡ (BC). | AN est entre | AB et | AD. Dans les triangles ANM et BNM on a (AN) ≡ (BN) et ∢ NAM ≡ ∢ NBM ; comme ∢ D′AM ≡ ∢ CBM, on a ∢ D′AN ≡ ∢ CBN. Dans les triangles D′AN et CBN on a ∢ AD′N ≡ ∢ BCN ; ∢ AD′N est droit, ND′ est perpendiculaire à AD, ce qui est impossible (§ 196). On n'a donc pas (AD > (BC). De même, on n'a pas (BC) > (AD). On a donc (AD) ≡ (BC). De même, (AB) ≡ (DC). C. q. f. d.

199. Théorème *S'il existe un seul rectangle, tout quadrilatère trirectangle est un rectangle.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un rectangle ABCD. Soit KLMN un quadrilatère trirectangle quelconque, les angles droits étant en N, K et L. Il s'agit de montrer que l'angle ∢ NML est droit.

Soient H et E les milieux de (AD) et de (AB). Élevons en H et en E les perpendiculaires à AD et à AB dans le plan ABCD. La perpendiculaire en H coupe (BC) en F, celle en E coupe (DC) en G ; (HF) et (EG) ont un point commun I (§ 196). On a AB = DC, AD = BC (§ 198). AEGD et EBCG sont des rectangles (§ 65), de même que les quatre quadrilatères plus petits dans lesquels ABCD se trouve partagé.

Cela étant, on voit aisément que si B′ et D′ sont deux points de (AB) et de (AD) pour lesquels on a $AB' = \frac{k}{2^l} AB$ et $AD' = \frac{m}{2^n} AD$, *k, l, m, n* désignant des nombres entiers positifs, les perpendiculaires élevées en B′ et D′ à AB et à AD dans le plan ABCD se couperont en un point C′, et AB′C′D′ sera un rectangle.

Nous pouvons trouver deux points B′ et D′ tels que AB′ < KL et AD′ < KN. Il y aura alors deux points L′ et N′ respectivement entre K et L et entre K en N tels que KL′ = AB′ et KN′ = AD′. Élevons en L′ la perpen-

diculaire à KL dans le plan KLMN ; elle passera par un point O′ situé entre N et M (§ 196). La perpendiculaire en N′ à KN dans le même plan passera par un point M′ situé entre L′ et O′ et par un point P′ situé entre L et M ; M′ sera entre N′ et P′. Par la considération des triangles D′AB′, N′KL′ et D′B′C′, N′L′M′ on voit que les angles et les côtés de AB′C′D′ sont congruents chacun à chacun à ceux de KL′M′N′, et que par suite KL′M′N′ est un rectangle.

Soit L″ un point situé entre L′ et L tel que $KL'' = \frac{i}{2^j} KL'$ (i et j sont entiers et positifs) et que $L'L'' < KL'$. La perpendiculaire élevée en L″ à KL dans le plan KLMN passe par un point M″ situé entre M′ et P′. Il y a un point L''_1 entre K et L′ tel que $L''_1L' = L'L''$. La perpendiculaire en L''_1 à KL dans le plan KLMN passe par un point M''_1 situé entre N′ et M′. On a $KL''_1 = KL' - (KL'' - KL')$ $= 2KL' - KL'' = 2KL' - \frac{i}{2^j} KL' = KL' \frac{2^{j+1} - i}{2^j}$; $L''_1L'M'M''_1$ est donc un rectangle et L′L″M″M′ le sera aussi. On voit ensuite aisément que si L″ est un point quelconque situé entre L′ et L tel que $KL'' = \frac{i}{2^j} KL'$, la restriction $L'L'' < KL'$ étant laissée de côté, L′L″M″N′ sera encore un rectangle. Faisons maintenant varier les nombres entiers et positifs i et j de façon que l'on ait toujours $\frac{i}{2^j} KL' < KL$ et que $\lim \frac{i}{2^j} KL' = KL$. Alors nous aurons $\lim KL'' = KL$ et par suite $\lim \sphericalangle M'M''L'' = \sphericalangle N'P'L$ (§ 169). Or, on a constamment $\sphericalangle M'M''L'' = \frac{\pi}{2}$. On a donc $\sphericalangle N'P'L = \frac{\pi}{2}$.

Soit N″ un point quelconque situé entre N′ et N tel que $KN'' = \frac{i}{2^j} KN'$ (i et j sont entiers et positifs). La perpendiculaire en N″ à KN dans le plan KLMN passe par un point P″ situé entre P′ et M. On montre aisément comme nous l'avons fait pour L″ que $\sphericalangle N''P''L$ sera droit.

Faisons varier encore i et j de façon que N''N tende vers 0. Nous aurons $\lim \sphericalangle N''P''L = \sphericalangle NML$. Donc, $\sphericalangle NML = \frac{\pi}{2}$ et $\sphericalangle NML$ est droit. C. q. f. d.

200. Théorème. *S'il existe un seul rectangle, tout quadrilatère birectangle isoscèle est un rectangle.*

Démonstration. Ce théorème résulte des §§ 65 et 199.

201. Théorème. *S'il existe un seul rectangle, deux perpendiculaires à une même droite dans un même plan ne peuvent avoir de point commun.*

Démonstration. Supposons le théorème faux. Il existe alors un triangle ABC dans lequel les angles en A et en B sont droits. Soit D un point situé entre A et C. On a $AC = BC$; il y a donc un point E entre B et C tel que $BE = AD$. ADEB est un rectangle (§ 200), $DE = AB$ (§ 198). On a aussi $EC = DC$ et $DE < 2DC$. Donc, $\lim_{DC \gtrless 0} DE = 0$, ce qui est impossible puisque DE est constant et égal à AB.

202. Théorème. *S'il existe un seul triangle rectangle dans lequel la somme des mesures des angles est égale à* π, *il en est de même pour tout triangle rectangle.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un seul triangle ABC dans lequel on a $\sphericalangle ACB = \frac{\pi}{2}$ et $\sphericalangle ACB + \sphericalangle CBA + \sphericalangle BAC = \pi$. Soit A'B'C' un triangle rectangle quelconque, C' désignant le sommet de l'angle droit.

Les angles $\sphericalangle CBA$ et $\sphericalangle CAB$ sont aigus. Il existe un point E sur (AB) tel que $\sphericalangle ECA = \sphericalangle EAC$. Or, $\sphericalangle EBC + \sphericalangle ECA = \sphericalangle EBC + \sphericalangle EAC = \frac{\pi}{2}$ et $\sphericalangle ECB + \sphericalangle ECA = \frac{\pi}{2}$; donc, $\sphericalangle ECB = \sphericalangle EBC$. Soient D et F les milieux de (CB) et de (CA) respectivement. $\sphericalangle EFC$ et $\sphericalangle EDC$ sont droits. On a $\sphericalangle FED = \sphericalangle FEC + \sphericalangle CED = \frac{1}{2}(\sphericalangle AEC + \sphericalangle CEB) = \frac{\pi}{2}$ et $\sphericalangle FED$ est droit. CDEF est donc un rectangle.

Soit maintenant F' le milieu de (A'C'). La perpendicu-

laire en F' à $A'C'$ dans le plan $A'C'B'$ passe par un point de $(A'B')$ ou de $(B'C')$. Elle ne peut passer par un point de $(B'C')$ (§ 201). Elle passe donc par un point de $(A'B')$; soit E' ce point.

$\sphericalangle A'E'F'$ est aigu (§ 201) et $\sphericalangle F'E'B'$ est obtus. Une des deux semi-droites déterminées par le point E' sur la perpendiculaire élevée en E' à $F'E'$ dans le plan $A'B'C'$ est donc intérieure à $F'E'B'$; cette perpendiculaire passe donc par un point du segment $(F'B')$. Elle passe donc par un point de $(F'C')$ ou de $(B'C')$. Ne pouvant passer par un point de $(F'C')$ (§ 201), elle passe par un point D' intérieur à $(C'B')$.

$C'D'E'F'$ est un rectangle (§ 199). On a successivement $\sphericalangle E'A'C' = \sphericalangle E'C'A'$, $\sphericalangle A'E'F' = \sphericalangle C'E'F'$, $\sphericalangle D'E'B' = \pi - \sphericalangle F'E'D' - \sphericalangle A'E'F' = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle A'E'F' = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle C'E'F' = \sphericalangle D'E'C'$, $\sphericalangle E'B'C' = \sphericalangle E'C'B'$, $\sphericalangle A'C'B' + \sphericalangle C'B'A' + \sphericalangle B'A'C' = \frac{\pi}{2} + \sphericalangle E'C'B' + \sphericalangle E'C'A' = \pi$.

C. q. f. d.

203. Théorème. *S'il existe un seul triangle rectangle dans lequel la somme des mesures des angles est inférieure à π, il en est de même pour tout triangle rectangle.*

Démonstration. Soit ABC un triangle rectangle en C dans lequel on a $\sphericalangle ACB + \sphericalangle CBA + \sphericalangle BAC < \pi$ et $A'B'C'$ un triangle rectangle quelconque, C' désignant le sommet de l'angle droit. Laissons $|CB$ et $|CA$ fixes et faisons d'abord B s'approcher continûment de C jusqu'à ce que $CB < C'B'$. Faisons ensuite A s'approcher continûment de C jusqu'à ce que $CA < C'A'$. Il y a un point B'' entre C' et B' tel que $C'B'' = CB$ et un point A'' entre C' et A' tel que $C'A'' = CA$. La somme des mesures des angles du triangle $A''B''C'$ est égale à la somme des mesures des angles du triangle ABC. Déplaçons maintenant B'' continûment le long de $|C'B'$ jusqu'en B'; déplaçons ensuite A'' continûment le long de $|C'A'$ jusqu'en A'.

Pendant ces différents déplacements continus des points B, A, B'' et A'', la somme des mesures des angles des

triangles ABC et A″B″C′ a variée continûment (§§ 161 et 166). La valeur initiale de cette somme est inférieure à π et la valeur finale est précisément égale à la somme des mesures des angles du triangle A′B′C′. Cette valeur finale est différente de π, sinon la somme des mesures des angles de ABC serait aussi π (§ 202). Si la valeur finale de la somme variable était supérieure à π, cette somme aurait passé par la valeur π, d'après le théorème de Cauchy (§ 162, p. 109), et cela est impossible (§ 202). Donc, la valeur finale de la somme est également inférieure à π. C. q. f. d.

204. Théorème. *S'il existe un seul triangle rectangle dans lequel la somme des mesures des angles est supérieure à π, il en est de même pour tout triangle rectangle.*

Démonstration. Ce théorème se démontre immédiatement par l'absurde, au moyen des §§ 202 et 203.

205. Théorème. *S'il existe un seul triangle dans lequel la somme des mesures des angles est égale à π, il en est de même pour tout triangle.*

Démonstration. Soit ABC un triangle dans lequel la somme des mesures des angles est égale à π. Deux angles au moins de ce triangle sont aigus. Supposons ∢ CAB et ∢ CBA aigus. Il y a un point D entre A et B tel que CD est perpendiculaire à AB (§ 168).

On voit aisément au moyen des §§ 203 et 204 que la somme des mesures des angles du triangle rectangle ADC ne peut être inférieure ou supérieure à π ; elle est donc égale à π et la somme des mesures des angles d'un triangle rectangle quelconque est égale à π D'autre part, dans un triangle où aucun angle n'est droit, il y a deux angles aigus ou deux angles obtus. On peut donc partager un tel triangle en deux triangles rectangles (§ 168) Dans chacun d'eux la somme des mesures des angles est π ; il en est donc de même pour le triangle entier.

C. q. f. d.

206. Théorème. *S'il existe un seul triangle dans lequel la somme des mesures des angles est inférieure à π, il en est de même pour tout triangle.*

Démonstration. Ce théorème se démontre exactement de la même façon que le théorème du § 205.

207. Théorème. *S'il existe un seul triangle dans lequel la somme des mesures des angles est supérieure à π, il en est de même pour tout triangle.*

Démonstration. On établit immédiatement ce théorème par l'absurde, au moyen des §§ 205 et 206

208. Nous appellerons *hypothèse de l'angle aigu* la supposition suivant laquelle il existe un triangle au moins dans lequel la somme des mesures des angles est inférieure à π, *hypothèse de l'angle droit* la supposition suivant laquelle il existe au moins un triangle dans lequel la somme des mesures des angles est égale à π, et *hypothèse de l'angle obtus* la supposition suivant laquelle il existe un triangle au moins dans lequel la somme des mesures des angles est supérieure à π. On voit immédiatement que l'une au moins des trois hypothèses est vraie.

Les §§ 205, 206 et 207 nous apprennent de plus que les trois hypothèses s'excluent mutuellement.

209. Nous nous trouvons actuellement en face de la question suivante : est-ce que les trois hypothèses sont toutes les trois compatibles avec les postulats de la géométrie générale ? Nous allons maintenant aborder cette question, mais dans le présent chapitre nous nous limiterons à quelques théorèmes faciles à établir qui s'y rapportent. Nous réserverons la solution complète de la question aux chapitres suivants.

210. Théorème. *On peut démontrer au moyen des postulats de la géométrie générale et du postulat III 1 de la géométrie euclidienne qu'on peut toujours abaisser une perpendiculaire et une seule d'un point extérieur à une droite sur cette droite.*

Démonstration. Nous allons démontrer la propriété relative à la perpendicularité dont il est question dans l'énoncé en nous servant de toutes les connaissances de la géométrie générale dont nous disposons et du postulat III 1 du § 3, et en nous basant seulement sur ces prémisses. Cela étant fait, notre théorème sera établi.

Soient a une droite et A un point non situé sur a. Montrons qu'on peut abaisser de A une perpendiculaire sur a. Soit B un point de a. Si AB est perpendiculaire à a, la thèse est établie. Supposons AB non perpendiculaire à a. Soit a' l'une des deux semi-droites en lesquelles B partage a. Soit s la semi-droite issue de B, située dans le plan Aa du côté de a opposé à celui de A, telle que $(a', | \mathrm{BA}) \equiv (a', s)$ (§ 10, postulat III 4). Il existe un point A′ sur s tel que $(\mathrm{AB}) \equiv (\mathrm{A'B})$ (§ 3. postulat III 1). a passe par un point C situé entre A et A′ (§ 10, théorème II 3). Si C est sur a', on a $\sphericalangle \mathrm{CBA} \equiv \sphericalangle \mathrm{CBA'}$ par construction; si C est sur la semi-droite opposée à a', on a $\sphericalangle \mathrm{CBA} \equiv \sphericalangle \mathrm{CBA'}$ d'après le § 40. On a donc $\sphericalangle \mathrm{BCA} \equiv \sphericalangle \mathrm{BCA'}$ (§ 36). AC est donc perpendiculaire à a (§ 52), et la thèse est établie.

Montrons que la perpendiculaire AC est unique. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Il existe sur a un point D distinct de C tel que AD est perpendiculaire à a. Menons A′D. On a $(\mathrm{AC}) \equiv (\mathrm{A'C})$ (§ 36), $\sphericalangle \mathrm{CDA} \equiv \sphericalangle \mathrm{CDA'}$ (§ 36), $\sphericalangle \mathrm{A'DC} + \sphericalangle \mathrm{CDA} = \pi$, D est situé sur la droite AA′ (§ 150), C est aussi sur cette droite, AA′ coïncide avec a (§ 10, postulat I 1), A est sur a, ce qui n'est pas le cas.

Dans cette démonstration, nous avons toujours raisonné exactement comme si nous nous trouvions dans le domaine de la géométrie générale, sauf un certain nombre de fois où nous avons fait explicitement appel au postulat III 1 du § 3. Le théorème est donc établi.

211. Théorème. *On peut démontrer au moyen des postulats de la géométrie générale et du postulat III 1 de la géométrie euclidienne qu'étant donnés un point* A *et une droite a ne passant pas par* A, *il existe au moins une droite passant par* A, *située dans le plan de* A *et de a et n'ayant avec a aucun point commun.*

Démonstration. Nous allons de nouveau raisonner exactement comme si nous nous trouvions dans le domaine de la géométrie générale, sauf un certain nombre de fois où nous ferons appel à d'autres prémisses explicitement indiquées. Soit B le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur a (§ 210). Soit AC la perpendiculaire élevée en A

à AB dans le plan Aa (§ 54) Les droites AC et a n'ont aucun point commun (§ 210) et sont situées dans un même plan. Il résulte de la nature des prémisses auxquelles nous avons fait appel dans ce raisonnement en dehors de la géométrie générale que le théorème à établir est vrai.

212. Théorème. *On peut démontrer au moyen des postulats de la géométrie générale et du postulat III 1 de la géométrie euclidienne que la somme des mesures des angles d'un triangle est toujours inférieure ou égale à π.*

Démonstration. Nous allons de nouveau raisonner exactement comme si nous nous trouvions dans le domaine de la géométrie générale, sauf un certain nombre de fois où nous ferons appel à d'autres prémisses explicitement indiquées. Nous allons d'abord démontrer le lemme suivant : la somme des mesures de deux angles d'un triangle est inférieure à π. En effet.

Soit $A_1A_2B_1$ un triangle. Supposons $\sphericalangle B_1A_1A_2 + \sphericalangle B_1A_2A_1 \geqslant \pi$. Il existe un point B'_1 sur (A_1B_1) distinct de A_1 tel que $\sphericalangle B'_1A_1A_2 + \sphericalangle B'_1A_2A_1 = \pi$. Il existe un point B''_1 sur $A_1B'_1$ tel que A_1 est entre B''_1 et B'_1 et tel que $A_1B''_1 = A_2B'_1$ (postulat III 1, § 3). Menons B''_1A_2. Soit C un point de B'_1A_2 tel que A_2 soit entre B'_1 et C. On a

$$\sphericalangle B''_1A_1A_2 = \pi - \sphericalangle B'_1A_1A_2 = \sphericalangle B'_1A_2A_1,$$
$$\sphericalangle A_1A_2B''_1 = \sphericalangle B'_1A_1A_2 \quad (\S\ 36),$$
$$\sphericalangle A_1A_2C = \pi - \sphericalangle A_1A_2B'_1 = \sphericalangle B'_1A_1A_2 = \sphericalangle A_1A_2B''_1.$$

C et B''_1 sont du même côté de A_1A_2, $A_2B''_1$ et A_2C coïncident, B''_1 est sur B'_1A_2, $B'_1B''_1$ et B'_1A_2 coïncident, A_2 est sur A_1B_1, ce qui est impossible. Le lemme est ainsi établi.

Soit maintenant $A_1A_2B_1$ un triangle quelconque. Je dis qu'on a $\sphericalangle B_1A_1A_2 + \sphericalangle A_1A_2B_1 + \sphericalangle A_2B_1A_1 < \pi$. En effet.

Supposons la thèse fausse. On a $\sphericalangle B_1A_1A_2 + \sphericalangle A_1A_2B_1 + \sphericalangle A_2B_1A_1 > \pi$. Soit n un nombre entier et positif quelconque. Construisons sur $|A_1A_2$ la suite de points $A_3, A_4, \ldots, A_n, A_{n+1}$ telle que A_2 soit entre A_1 et A_3, A_3 entre A_1 et $A_4, \ldots, A_n$ entre A_1 et A_{n+1} et telle que

$A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \cdots = A_n A_{n+1}$ (§ 3, postulat III 1). Nous avons

$$\sphericalangle B_1A_1A_2 + \sphericalangle B_1A_2A_1 < \pi \quad \text{(d'après le lemme)},$$
$$\sphericalangle B_1A_1A_2 < \pi - \sphericalangle B_1A_2A_1 = \sphericalangle B_1A_2A_3.$$

Il y a une semi-droite issue de A_2 et située dans le plan $A_1B_1A_2$ entre $|A_2A_3$ et $|A_2B_1$ faisant avec $|A_2A_3$ un angle congruent à $\sphericalangle B_1A_1A_2$. Sur cette semi-droite il y a un point B_2 tel que $A_2B_2 = A_1B_1$ (§ 3, postulat III 1). Menons B_1B_2 et B_2A_3. Nous avons

$$\sphericalangle B_1A_1A_2 + \sphericalangle A_1A_2B_1 + \sphericalangle B_1A_2B_2 = \pi,$$
$$\sphericalangle A_2B_1A_1 > \sphericalangle B_1A_2B_2.$$

Il y a une semi-droite issue de B_1, située dans le plan $A_1B_1A_2$ entre $|B_1A_1$ et $|B_1A_2$ faisant avec $|B_1A_1$ un angle congruent à $\sphericalangle B_1A_2B_2$. Sur cette semi-droite il y a un point C tel que $B_1C = B_1A_2$ (§ 3, postulat III 1). On a $A_1C = B_1B_2$ (§ 36). $|B_1C$ coupe A_1A_2 en un point D situé entre A_1 et A_2. Supposons d'abord C entre D et B_1. On a

$$\sphericalangle A_1A_2C < \pi - \sphericalangle CA_2B_1 = \pi - \sphericalangle A_2CB_1$$
$$= \sphericalangle A_2CD < \sphericalangle A_2CA_1,$$
$$A_1A_2 > A_1C \quad (\text{§ } 155).$$

Si C n'était pas entre D et B_1, D serait sur (CB_1) et par un raisonnement analogue au précédent on trouverait encore $A_1A_2 > A_1C$. On a donc dans tous les cas $A_1A_2 > B_1B_2$. Les différents côtés et angles du triangle $A_1A_2B_1$ sont congruents chacun à chacun à ceux du triangle $A_2A_3B_2$. En répétant encore $n-2$ fois la construction qui a fourni le triangle $A_2A_3B_2$, nous obtiendrons une suite de triangles $A_3A_4B_3$, .., $A_nA_{n+1}B_n$. Construisons finalement le point B_{n+1}, analogue aux autres points B (§ 3, postulat III 1) et menons $B_2B_3, \ldots, B_nB_{n+1}$. Les différents triangles $A_3A_4B_3, \ldots, A_nA_{n+1}B_n$ ont leurs angles et leurs côtés congruents chacun à chacun à ceux de $A_1A_2B_1$ et l'on a $B_1B_2 = B_2B_3 = \cdots = B_nB_{n+1}$, $A_{n+1}B_{n+1} = A_1B_1$. On a ensuite

$$A_1A_{n+1} < A_1B_1 + B_1B_2 + B_2B_3 + \cdots + B_nB_{n+1}$$
$$+ B_{n+1}A_{n+1} \quad (\text{§ } 177),$$
$$n\, A_1A_2 < 2A_1B_1 + n\, B_1B_2,$$
$$n\,(A_1A_2 - B_1B_2) < 2A_1B_1.$$

Quand n varie, $2A_1B_1$ reste fixe; $A_1A_2 - B_1B_2$ est positif. On peut donc prendre n assez grand pour que $n(A_1A_2 - B_1B_2) > 2A_1B_1$. Nous arrivons donc à une contradiction et l'on a par conséquent $\sphericalangle B_1A_1A_2 + \sphericalangle A_1A_2B_1 + \sphericalangle A_2B_1A_1 \leqslant \pi$.(1)

Il résulte de la nature des prémisses auxquelles nous avons fait appel en dehors de la géométrie générale dans cette démonstration que le théorème est établi.

213 Théorème. *On peut démontrer au moyen des postulats de la géométrie générale, du postulat III 1 de la géométrie euclidienne et du postulat des parallèles que la somme des mesures des angles d'un triangle est toujours égale à* π.

Démonstration. Nous allons encore raisonner exactement comme si nous nous trouvions dans le domaine de la géométrie générale, sauf un certain nombre de fois où nous ferons appel à d'autres prémisses explicitement indiquées.

Nous allons d'abord démontrer le lemme suivant : supposons donnés quatre points distincts A, B, C, D situés dans un même plan; supposons C et D situés du même côté de AB; supposons que AC et BD n'aient aucun point commun; alors $\sphericalangle DBA + \sphericalangle CAB = \pi$ En effet.

Supposons $\sphericalangle DBA + \sphericalangle CAB \neq \pi$. Il existe un point D' situé dans le plan ABD du même côté de AB que D mais non sur BD tel que $\sphericalangle D'BA + \sphericalangle CAB = \pi$. AC et BD' ont un point commun P (§ 3, postulat IV). En distinguant les cas où P est du même côté de AB que C ou du côté opposé, on trouve aisément qu'on a toujours $\sphericalangle PAB + \sphericalangle ABP + \sphericalangle BPA > \pi$, ce qui est impossible (§ 212). Le lemme est donc établi.

Soit maintenant ABC un triangle quelconque. Soit D un point de AB tel que B soit entre A et D. Il existe une droite passant par B, située dans le plan ABC et n'ayant avec AC aucun point commun (§ 211). Une des deux semi-droites déterminées par B sur cette droite est située

(1) Cette démonstration est due à Legendre.

du même côté de AB que C. Cette semi-droite ne peut être entre | BA et | BC (§ 28). Elle est donc entre | BC et | BD (§ 31). Soit E un point de cette semi droite distinct de B. Soit F un point de AC tel que C soit entre A et F. On a

$$\sphericalangle CAB + \sphericalangle ABE = \pi \text{ (d'après le lemme),}$$
$$\sphericalangle FCB + \sphericalangle CBE = \pi \text{ (d'après le lemme),}$$
$$\sphericalangle CAB = \pi - \sphericalangle ABE = \sphericalangle EBD,$$
$$\sphericalangle ACB = \pi - \sphericalangle FCB = CBE,$$
$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle CBE + \sphericalangle EBD = \pi,$$
$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB + \sphericalangle CAB = \pi.$$

La somme des mesures des angles du triangle est donc π.

Par la nature des prémisses sur lesquelles nous nous sommes appuyés en dehors de la géométrie générale, on voit que le théorème est établi.

214. Théorème. *Le postulat des parallèles est une conséquence logique des postulats de la géométrie générale, du postulat III 1 de la géomé rie euclidienne et de la proposition : « la somme des mesures des angles d'un triangle est toujours égale à π ».*

Démonstration. Nous allons encore raisonner exactement comme si nous nous trouvions dans le domaine de la géométrie générale, sauf un certain nombre de fois où nous ferons appel à d'autres prémisses explicitement indiquées.

Supposons le postulat des parallèles faux. Alors il existe une droite a et un point A extérieur à a tel qu'il passe au moins deux droites distinctes par A, situées dans le plan Aa et n'ayant avec a aucun point commun. Abaissons de A la perpendiculaire sur a et soit P son pied (§ 210). Élevons en A la perpendiculaire à AP dans le plan Aa et soit Q un point de cette perpendiculaire distinct de A. Les droites AQ et a n'ont aucun point commun (§ 210). Il existe une droite AQ′ passant par A, située dans le plan Aa, distincte de AQ et n'ayant avec a aucun point commun. A divise les droites AQ et AQ′ chacune en deux semi-droites. On peut toujours choisir le point Q sur AQ et le point Q′ sur AQ′ de telle façon que | AQ′ soit entre | AQ

et | AP. Soit a' la semi-droite déterminée par P sur a qui est située du même côté de AP que Q et Q'.

Soit n un nombre positif arbitraire. Il existe n points distincts P_1, P_2, P_3, .., P_{n-1}, P_n sur a' tels que P_1 est entre P et P_2, P_2 entre P et P_3, ..., P_{n-1} entre P et P_n et tels que $PP_1 = AP$, $P_1P_2 = AP_1$, $P_2P_3 = AP_2$, ..., $P_{n-1}P_n = AP_{n-1}$ (§ 3, postulat III 1). D'après la proposition citée dans l'énoncé du théorème à établir, la somme des mesures des angles des différents triangles APP_1, AP_1P_2, AP_2P_3, ..., $AP_{n-1}P_n$ est toujours π. On a donc

$$\sphericalangle PAP_1 + \sphericalangle AP_1P + \sphericalangle P_1PA = \pi,$$

$$\sphericalangle PAP_1 + \sphericalangle AP_1P = \frac{\pi}{2},$$

$$2 \sphericalangle PAP_1 = \frac{\pi}{2} \text{ (§ 38)},$$

$$\sphericalangle PAP_1 = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2},$$

$$\sphericalangle P_1AP_2 + \sphericalangle AP_2P_1 = \pi - \sphericalangle AP_1P_2 = \sphericalangle AP_1P$$

$$= \sphericalangle PAP_1 = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2},$$

$$\sphericalangle P_1AP_2 = \frac{1}{2^2}\frac{\pi}{2},$$

$$\sphericalangle PAP_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right)\frac{\pi}{2}.$$

En continuant ainsi on trouve

$$\sphericalangle PAP_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{n=+\infty} \sphericalangle PAP_n = \frac{\pi}{2}.$$

On peut trouver n assez grand pour que $\sphericalangle PAP_n > \sphericalangle PAQ'$, puisque $\sphericalangle PAQ' < \sphericalangle PAQ = \frac{\pi}{2}$. Alors | AP_n sera entre | AQ' et | AQ, | AQ' sera entre | AP et | AP_n et coupera (PP_n), c. à d. a. Nous arrivons donc à une contradiction et le postulat est établi (1).

(1) Cette démonstration est due à LEGENDRE.

Par la nature des prémisses dont nous nous sommes servis en dehors de la géométrie générale, on voit que le théorème est établi.

Remarque. Il suit des §§ 213 et 214 qu'étant donnés les postulats de la géométrie générale et le postulat III 1 de la géométrie euclidienne, le postulat des parallèles et la proposition : « la somme des mesures des angles d'un triangle est toujours égale à π » sont parfaitement équivalents.

215. Théorème. *L'hypothèse de l'angle droit est compatible avec les postulats de la géométrie générale.*

Démonstration. Les postulats de la géométrie générale sont vrais dans la géométrie euclidienne (§ 11). L'hypothèse de l'angle droit est vraie dans la géométrie euclidienne (§ 213). Or, la géométrie euclidienne est exempte de contradictions (§ 4). Donc, l'hypothèse de l'angle droit et les postulats de la géométrie générale ne sont pas contradictoires entre eux. C. q. f. d.

Pour ce qui regarde les deux autres hypothèses, la question de savoir si elles sont compatibles avec les postulats de la géométrie générale est moins simple à résoudre. Cette question fera l'objet des quatre chapitres suivants, où nous montrerons qu'on peut y répondre affirmativement.

CHAPITRE VIII.

Notions de géométrie projective.

216. Pour résoudre la question de savoir si l'hypothèse de l'angle aigu est compatible avec les postulats de la géométrie générale, nous aurons recours à la géométrie projective; nous commencerons par exposer les notions de cette discipline dont nous aurons besoin. Nous considérerons ici la géométrie projective comme une branche de la géométrie euclidienne, et dans les questions de géométrie projective nous nous servirons de toutes les connaissances de géométrie euclidienne élémentaire et analytique dont nous disposons. Il est donc bien entendu que dans ce chapitre nous quittons le domaine de la géométrie générale et nous nous transportons dans celui de la géométrie euclidienne. – Remarquons toutefois, avant de continuer, que le point de vue dont nous envisagerons la géométrie projective ici est loin de donner une idée adéquate de sa véritable portée. Nous reviendrons encore sur ce point au § 272. Pour donner une idée précise de la véritable portée de la géométie projective, il faudrait sortir du cadre de ce travail.

Nous nous sommes inspirés ici des développements consacrés à la projectivité qu'on trouve dans le « Cours de géométrie analytique de la faculté des sciences » par C. Servais, Gand 1910 (autographié).

217. Remarque. Chaque fois que nous faisons de la géométrie euclidienne, nous continuerons en général dans ce livre à employer la même terminologie et les mêmes notations que dans la géométrie générale; toute exception à cette règle sera mentionnée, à moins que le sens des termes ou notations en question ne ressorte clairement du contexte. Voici pour commencer deux exceptions: dans

ce chapitre, nous entendrons par semi-droite une droite associée à l'un des deux sens de succession que l'on peut distinguer entre ses points; ensuite nous emploierons les symboles servant à désigner dans la géométrie générale la mesure d'un angle ou d'un segment pour indiquer la valeur algébrique de cette mesure; cette valeur algébrique sera supposée déterminée conformément aux conventions en usage dans la géométrie analytique euclidienne.

218. Définitions. On appelle *point à l'infini* l'ensemble des droites de l'espace parallèles à une même droite. On dit qu'un point à l'infini *appartient à* une droite lorsque cette droite fait partie de l'ensemble de droites parallèles qui constitue le point à l'infini. On dit qu'un point à l'infini *appartient à* un plan lorsque toutes les droites qui le constituent sont parallèles au plan.

On appelle *droite à l'infini* l'ensemble des points à l'infini situés dans un même plan. On appelle *plan à l'infini* l'ensemble de tous les points à l'infini de l'espace.

219. Théorème. *Si dans les énoncés des postulats de l'appartenance de la géométrie euclidienne on convient d'entendre par point, droite et plan respectivement point ou point à l'infini, droite ou droite à l'infini et plan ou plan à l'infini, les propositions ainsi obtenues sont vraies.*

220. Convention. Dans ce chapitre nous entendrons à l'avenir par point, droite et plan aussi bien des points, droites et plans ordinaires que des points, droites et plans à l'infini. Les points, droites et plans ordinaires seront dits *à distance finie*.

221. Théorème. *Deux droites coplanaires distinctes ont toujours un point commun et un seul; deux plans distincts ont toujours une droite commune; un plan et une droite non située dans ce plan ont toujours un point commun et un seul.*

222. Définition. Supposons donnés un point à distance finie O et un système d'axes coordonnés OXYZ rectangulaires ou obliques ayant O comme origine. Soit A un point à l'infini; soient x, y, z les coordonnées cartésiennes

non homogènes par rapport aux axes OXYZ d'un point quelconque de la droite OA distinct de O et de A ; $x, y, z, 0$ sont par définition les *coordonnées cartésiennes homogènes* du point à l'infini A par rapport aux axes OXYZ.

Théorème. *Si x, y, z, u désignent les coordonnées cartésiennes homogènes par rapport aux axes* OXYZ *d'un point quelconque de l'espace, l'équation du plan à l'infini est $u = 0$.*

223. Théorème. *En coordonnées cartésiennes homogènes, tout plan est représenté par une équation linéaire et homogène et réciproquement; toute droite est représentée par un système de deux équations linéaires et homogènes distinctes et réciproquement.*

224. Supposons donnés quatre points A, B, C, D non situés dans un même plan, un point M non situé dans l'un des plans BCD, ACD, ABD, ABC et quatre nombres différents de zéro x_1, y_1, z_1, u_1 définis à moins d'un facteur de proportionnalité près. Désignons par P un point quelconque de l'espace.

Choisissons un point à distance finie O et un système d'axes coordonnés rectangulaires ou obliques OXYZ ayant O comme origine. Désignons par x', y', z', u' les coordonnées cartésiennes homogènes courantes par rapport aux axes OXYZ. Soient

$$(1) \quad \begin{cases} a_1x' + b_1y' + c_1z' + d_1u' = 0, \\ a_2x' + b_2y' + c_2z' + d_2u' = 0, \\ a_3x' + b_3y' + c_3z' + d_3u' = 0, \\ a_4x' + b_4y' + c_4z' + d_4u' = 0 \end{cases}$$

les équations des plans BCD, ACD, ABD, ABC respectivement. Dans chacune de ces équations les coefficients ne sont définis qu'à moins d'un facteur de proportionnalité près. Soient x'_1, y'_1, z'_1, u'_1 les coordonnées homogènes de M par rapport aux axes OXYZ ; choisissons les a, les b, les c et les d de façon que l'on ait

$$(2) \quad \begin{cases} a_1x'_1 + b_1y'_1 + c_1z'_1 + d_1u'_1 = x_1, \\ a_2x'_1 + b_2y'_1 + c_2z'_1 + d_2u'_1 = y_1, \\ a_3x'_1 + b_3y'_1 + c_3z'_1 + d_3u'_1 = z_1, \\ a_4x'_1 + b_4y'_1 + c_4z'_1 + d_4u'_1 = u_1. \end{cases}$$

Désignons maintenant par x', y', z', u' les coordonnées homogènes de P par rapport aux axes OXYZ. Posons

$$(3)\quad \begin{cases} a_1x' + b_1y' + c_1z' + d_1u' = x, \\ a_2x' + b_2y' + c_2z' + d_2u' = y, \\ a_3x' + b_3y' + c_3z' + d_3u' = z, \\ a_4x' + b_4y' + c_4z' + d_4u' = u. \end{cases}$$

Nous établissons ainsi une loi qui fait correspondre à chaque position de P un système de valeurs au moins des variables x, y, z, u. Les points A, B, C, D, M et les nombres x_1, y_1, z_1, u_1 étant donnés, et les axes OXYZ étant choisis, les valeurs de x, y, z, u qui répondent à une position déterminée de P sont déterminées à moins d'un facteur de proportionnalité près; on peut d'ailleurs multiplier les valeurs de x, y, z, u qui répondent à une position déterminée de P par un même nombre non nul arbitraire, puisqu'on peut faire la même chose avec les coordonnées homogènes de P par rapport aux axes OXYZ.

Si au lieu du système d'axes coordonnés OXYZ on choisit un autre système d'axes coordonnés rectangulaires ou obliques O'X'Y'Z', les points A, B, C, D, M, les nombres x_1, y_1, z_1, u_1 et P restant les mêmes, les valeurs trouvées pour x, y, z, u ne diffèrent de celles trouvées en partant des axes OXYZ que par un facteur de proportionnalité. Nous allons établir ce point.

Soient x', y', z', u' les coordonnées courantes par rapport aux axes OXYZ et x'', y'', z'', u'' les coordonnées courantes par rapport aux axes O'X'Y'Z'. Nous savons par la géométrie analytique qu'on a

$$(4)\quad \begin{cases} x' = \alpha_1x'' + \beta_1y'' + \gamma_1z'' + \delta_1u'', \\ y' = \alpha_2x'' + \beta_2y'' + \gamma_2z'' + \delta_2u'', \\ z' = \alpha_3x'' + \beta_3y'' + \gamma_3z'' + \delta_3u'', \\ u' = u'', \end{cases}$$

et ces formules de transformation sont valables pour les points à l'infini aussi bien que pour les points à

distance finie. Rapportés aux axes O′X′Y′Z′ les plans BCD, ACD, ABD, ABC auront respectivement comme équations

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}
&x''\rho_1(a_1\alpha_1+b_1\alpha_2+c_1\alpha_3)+y''\rho_1(a_1\beta_1+b_1\beta_2+c_1\beta_3)\\
&+z''\rho_1(a_1\gamma_1+b_1\gamma_2+c_1\gamma_3)+u''\rho_1(a_1\delta_1+b_1\delta_2+c_1\delta_3+d_1)=0,\\
&x''\rho_2(a_2\alpha_1+b_2\alpha_2+c_2\alpha_3)+y''\rho_2(a_2\beta_1+b_2\beta_2+c_2\beta_3)\\
&+z''\rho_2(a_2\gamma_1+b_2\gamma_2+c_2\gamma_3)+u''\rho_2(a_2\delta_1+b_2\delta_2+c_2\delta_3+d_2)=0,\\
&x''\rho_3(a_3\alpha_1+b_3\alpha_2+c_3\alpha_3)+y''\rho_3(a_3\beta_1+b_3\beta_2+c_3\beta_3)\\
&+z''\rho_3(a_3\gamma_1+b_3\gamma_2+c_3\gamma_3)+u''\rho_3(a_3\delta_1+b_3\delta_2+c_3\delta_3+d_3)=0,\\
&x''\rho_4(a_4\alpha_1+b_4\alpha_2+c_4\alpha_3)+y''\rho_4(a_4\beta_1+b_4\beta_2+c_4\beta_3)\\
&+z''\rho_4(a_4\gamma_1+b_4\gamma_2+c_4\gamma_3)+u''\rho_4(a_4\delta_1+b_4\delta_2+c_4\delta_3+d_4)=0,
\end{aligned}\right.$$

$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ étant des nombres non nuls. Soient $x''_1, y''_1, z''_1, u''_1$ les coordonnées homogènes de M par rapport aux axes O′X′Y′Z′. $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ doivent maintenant être définis par les conditions

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}
&x''_1\rho_1(a_1\alpha_1+\cdots)+y''_1\rho_1(a_1\beta_1+\cdots)\\
&+z''_1\rho_1(a_1\gamma_1+\cdots)+u''_1\rho_1(a_1\delta_1+\cdots)=x_1,\\
&x''_1\rho_2(a_2\alpha_1+\cdots)+y''_1\rho_2(a_2\beta_1+\cdots)\\
&+z''_1\rho_2(a_2\gamma_1+\cdots)+u''_1\rho_2(a_2\delta_1+\cdots)=y_1,\\
&x''_1\rho_3(a_3\alpha_1+\cdots)+y''_1\rho_3(a_3\beta_1+\cdots)\\
&+z''_1\rho_3(a_3\gamma_1+\cdots)+u''_1\rho_3(a_3\delta_1+\cdots)=z_1,\\
&x''_1\rho_4(a_4\alpha_1+\cdots)+y''_1\rho_4(a_4\beta_1+\cdots)\\
&+z''_1\rho_4(a_4\gamma_1+\cdots)+u''_1\rho_4(a_4\delta_1+\cdots)=u_1,
\end{aligned}\right.$$

ou bien, d'après (4),

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}
&\rho_1a_1x'_1+\rho_1b_1y'_1+\rho_1c_1z'_1+\rho_1d_1u'_1=x_1,\\
&\rho_2a_2x'_1+\rho_2b_2y'_1+\rho_2c_2z'_1+\rho_2d_2u'_1=y_1,\\
&\rho_3a_3x'_1+\rho_3b_3y'_1+\rho_3c_3z'_1+\rho_3d_3u'_1=z_1,\\
&\rho_4a_4x'_1+\rho_4b_4y'_1+\rho_4c_4z'_1+\rho_4d_4u'_1=u_1.
\end{aligned}\right.$$

On a donc d'après (2) $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4$. Si maintenant nous désignons par x', y', z', u' les coordonnées de P par rapport aux axes OXYZ, par x'', y'', z'', u'' les coordonnées de P par rapport aux axes O′X′Y′Z′ et par $\xi, \eta, \zeta, \varepsilon$ les valeurs trouvées pour les variables x, y, z, u en partant

des axes O'X'Y'Z' au lieu des axes OXYZ, nous aurons

$$(8)\quad \begin{cases} x''\rho_1(a_1\alpha_1+\cdots)+y''\rho_1(a_1\beta_1+\cdots) \\ +z''\rho_1(a_1\gamma_1+\cdots)+u''\rho_1(a_1\delta_1+\cdots)=\xi, \\ x''\rho_1(a_2\alpha_1+\cdots)+y''\rho_1(a_2\beta_1+\cdots) \\ +z''\rho_1(a_2\gamma_1+\cdots)+u''\rho_1(a_2\delta_1+\cdots)=\eta, \\ x''\rho_1(a_3\alpha_1+\cdots)+y''\rho_1(a_3\beta_1+\cdots) \\ +z''\rho_1(a_3\gamma_1+\cdots)+u''\rho_1(a_3\delta_1+\cdots)=\zeta, \\ x''\rho_1(a_4\alpha_1+\cdots)+y''\rho_1(a_4\beta_1+\cdots) \\ +z''\rho_1(a_4\gamma_1+\cdots)+u''\rho_1(a_4\delta_1+\cdots)=\varepsilon, \end{cases}$$

ou bien, d'après (4),

$$(9)\quad \begin{cases} \rho_1a_1x'+\rho_1b_1y'+\rho_1c_1z'+\rho_1d_1u'=\xi, \\ \rho_1a_2x'+\rho_1b_2y'+\rho_1c_2z'+\rho_1d_2u'=\eta, \\ \rho_1a_3x'+\rho_1b_3y'+\rho_1c_3z'+\rho_1d_3u'=\zeta, \\ \rho_1a_4x'+\rho_1b_4y'+\rho_1c_4z'+\rho_1d_4u'=\varepsilon. \end{cases}$$

D'après (3), ξ, η, ζ, ε diffèrent seulement par un facteur de proportionnalité de x, y, z, u. La thèse est ainsi établie.

De là il suit que les valeurs de x, y, z, u qui répondent à une position déterminée de P sont indépendantes du choix de OXYZ; ces valeurs ne dépendent que de P et de A, B, C, D, M, x_1, y_1, z_1, u_1.

Les plans BCD, ACD, ABD, ABC ne passent pas par un même point. Par conséquent, le déterminant des coefficients de x', y', z', u' dans (1) est différent de zéro ; il en est de même du déterminant des coefficients de x', y', z', u' dans (3) et les équations (3) sont résolubles par rapport à x', y', z', u'. Par conséquent, étant donné un système de valeurs non toutes nulles de x, y, z, u, il y répond un point P et un seul.

Définition. Les nombres x, y, z, u qui répondent à un point P sont appelés les *coordonnées tétraédriques de* P par rapport au *tétraèdre de référence* ABCD.

Théorème. *Par rapport au tétraèdre de référence* ABCD *les coordonnées de* A *sont* a, 0, 0, 0, *celles de* B 0, b, 0, 0, *celles de* C 0, 0, c, 0, *celles de* D 0, 0, 0, d, *les nombres* a, b, c, d *étant différents de zéro. Les coordonnées de* M *sont* x_1, y_1, z_1, u_1.

Remarques. Pour qu'un système de coordonnées tétraédriques soit déterminé, il suffit, d'après ce qui précède,

que l'on donne le tétraèdre de référence et les coordonnées d'un point non situé dans l'un des plans constitués par ses faces.

Etant donné un système d'axes coordonnés rectangulaires ou obliques OXYZ, désignons par M le point dont les coordonnées cartésiennes non homogènes sont 1, 1, 1 par rapport à ces axes et par A, B, C les intersections de OX, OY, OZ respectivement avec le plan à l'infini. Prenons comme tétraèdre de référence le tétraèdre ABCO et commes coordonnées tétraédriques de M les nombres 1, 1, 1, 1. On voit aisément qu'alors les coordonnées tétraédriques de P ne diffèrent que par un facteur de proportionnalité de ses coordonnées homogènes. Les coordonnées homogènes sont donc un cas particulier des coordonnées tétraédriques.

225. Théorème. *Supposons donnés deux systèmes de coordonnées tétraédriques quelconques. Soient x, y, z, u les coordonnées d'un point quelconque dans le premier système et x', y', z', u' les coordonnées du même point dans le second système. On a*

$$\begin{aligned} x &= a_1x' + b_1y' + c_1z' + d_1u', \\ y &= a_2x' + b_2y' + c_2z' + d_2u', \\ z &= a_3x' + b_3y' + c_3z' + d_3u', \\ u &= a_4x' + b_4y' + c_4z' + d_4u', \end{aligned}$$

les a, les b, les c et les d étant des constantes déterminées à moins d'un seul facteur de proportionnalité près quand les deux systèmes de coordonnées tétraédriques sont donnés. Le déterminant formé avec les a, les b, les c, les d est différent de zéro.

Démonstration. Soit OXYZ un système d'axes coordonnés cartésiens. Le § 224 permet de prouver que le théorème est vrai quand on passe de x', y', z', u' aux coordonnées homogènes du point par rapport à OXYZ ou de ces dernières coordonnées à x, y, z, u. On voit alors aisément que le théorème est vrai dans toute sa généralité.

226. Théorème. *En coordonnées tétraédriques, un plan est représenté par une équation linéaire et homogène et une droite par deux équations linéaires et homogènes*

distinctes. Une quadrique est représentée par une équation homogène du second degré et une conique par un système de deux équations homogènes, l'une du second degré et l'autre du premier degré. Toute équation linéaire et homogène représente un plan. Tout système de deux équations linéaires et homogènes distinctes représente une droite. Toute équation homogène du second degré représente une quadrique et tout système de deux équations homogènes, l'une du second degré et l'autre du premier, représente une conique, pourvu que l'on prenne les notions de conique et de quadrique dans le sens plus général que ces notions obtiennent en géométrie analytique après l'introduction des points à l'infini, et pourvu que l'équation donnée représente une surface réelle et le système d'équations donné une courbe réelle (1).

Démonstration. Pour établir le théorème, il suffit de considérer à côté du système de coordonnées tétraédriques donné un système de coordonnées homogènes, d'appliquer le § 225 à ces deux systèmes de coordonnées et de remarquer que le degré d'une équation algébrique n'est pas altéré par une substitution linéaire.

227. Théorème. *Supposons donné un système de coordonnées tétraédriques et soit* ABCD *le tétraèdre de référence. Les plans et les droites placés ci-dessous dans la colonne de gauche sont représentés par les equations ou systèmes d'équations placés en regard dans la colonne de droite :*

BCD .... $x = 0$;
ACD .... $y = 0$;
ABD .... $z = 0$;
ABC .... $u = 0$;
AB .... $z = 0, \quad u = 0$;
AC .... $y = 0, \quad u = 0$;
AD .... $y = 0, \quad z = 0$;
BC .... $x = 0, \quad u = 0$;
BD .... $x = 0, \quad z = 0$;
CD .... $x = 0, \quad y = 0$.

(1) Nous ne considérons pas ici les coniques et les quadriques imaginaires.

228. THÉORÈME. *Supposons donnés deux systèmes de coordonnées tétraédriques. Soit* ABCD *le tétraèdre de référence dans le premier système. Supposons que les trois premiers sommets du tétraèdre de référence dans le second système coïncident respectivement avec* A, B, C *et soit* D′ *le quatrième sommet du deuxième tétraèdre de référence. Supposons que les coordonnées d'un point* M *du plan* ABC *non situé sur l'une des droites* AB, AC, BC *soient* x_1, y_1, z_1, 0 *aussi bien dans l'un système que dans l'autre. Alors les coordonnées d'un point quelconque du plan* ABC *dans le premier système ne diffèrent que par un facteur de proportionnalité des coordonnées du même point dans le second système.*

DÉMONSTRATION x_1, y_1, z_1 sont différents de zéro. Soient a, 0, 0, 0 les coordonnées de A dans le premier système, 0, b, 0, 0 celles de B, 0, 0, c, 0 celles de C. a, b, c sont différents de zéro. Désignons par $\rho_1, \rho_2, \ldots$ des facteurs de proportionnalité différents de zéro. Soient x, y, z, u les coordonnées d'un point quelconque dans le premier système et x', y', z', u' les coordonnées du même point dans le second système. Nous avons (§ 225)

$$(1)\quad \begin{cases} x = a_1x' + b_1y' + c_1z' + d_1u', \\ y = a_2x' + b_2y' + c_2z' + d_2u', \\ z = a_3x' + b_3y' + c_3z' + d_3u', \\ u = a_4x' + b_4y' + c_4z' + d_4u', \end{cases}$$

et, en appliquant ces formules de transformation à A,

$$\begin{aligned} a &= a_1.\rho_1 a + b_1.0 + c_1.0 + d_1.0, \\ 0 &= a_2.\rho_1 a + b_2.0 + c_2.0 + d_2.0, \\ 0 &= a_3.\rho_1 a + b_3.0 + c_3.0 + d_3.0, \\ 0 &= a_4.\rho_1 a + b_4.0 + c_4.0 + d_4.0. \end{aligned}$$

De là il suit qu'on a $a_2 = a_3 = a_4 = 0$. On trouve de la même façon $b_1 = b_3 = b_4 = 0$, $c_1 = c_2 = c_4 = 0$. En appliquant les formules (1) au point M on trouve

$$\begin{aligned} \rho_2 x_1 &= a_1 x_1, \\ \rho_2 y_1 &= b_2 y_1, \\ \rho_2 z_1 &= c_3 z_1, \\ \rho_2 .0 &= 0. \end{aligned}$$

On a donc $a_1 = b_2 = c_3$ et les formules (1) deviennent

$$(2)\qquad \begin{cases} x = a_1 x' + d_1 u', \\ y = a_1 y' + d_2 u', \\ z = a_1 z' + d_3 u', \\ u = d_4 u'. \end{cases}$$

Soient P un point quelconque du plan ABC, x, y, z les trois premières coordonnées de P dans le premier système et x', y', z' les trois premières coordonnées de P dans le second système. La quatrième coordonnée de P est 0 dans les deux systèmes. D'après (2) nous avons

$$x = a_1 x',$$
$$y = a_1 y',$$
$$z = a_1 z'.$$

Le théorème se trouve ainsi établi.

229. Supposons donnés un tétraèdre ABCD, un point M du plan ABC non situé sur l'une des droites AB, AC, BC et trois nombres non nuls x_1, y_1, z_1. On voit aisément d'après le § 224 qu'on peut trouver un système de coordonnées tétraédriques où le tétraèdre de référence est ABCD et où le point M a comme coordonnées x_1, y_1, z_1, 0.

Définition. Supposons donnés un plan, trois points non en ligne droite A, B, C situés dans ce plan, un point M du plan ABC non situé sur l'une des droites AB, AC, BC et trois nombres non nuls x_1, y_1, z_1 définis à moins d'un facteur de proportionnalité près. Soit P un point quelconque du plan ABC. D'après ce que nous venons de voir, il existe au moins un système de coordonnées tétraédriques où les trois premiers sommets du tétraèdre de référence sont A, B, C et où les coordonnées de M sont x_1, y_1, z_1, 0. D'après le § 228, les coordonnées de P sont les mêmes dans tous les systèmes de coordonnées tétraédriques pareils, à moins d'un facteur de proportionnalité près, lorsque P reste fixe. La quatrième coordonnée de P est nulle dans tous ces systèmes. Les trois premières coordonnées de P dans l'un quelconque de ces systèmes sont par définition les *coordonnées trilinéaires* de P par rapport au *triangle de référence* ABC.

Étant donnés A, B, C, M, x_1, y_1, z_1, les coordonnées trilinéaires de P sont déterminées à moins d'un facteur de proportionnalité près ; on peut d'ailleurs multiplier ces coordonnées par un facteur de proportionnalité non nul arbitraire. Étant donnés trois nombres non simultanément nuls x, y, z, il existe un point P et un seul dans le plan ABC qui a x, y, z comme coordonnées trilinéaires ; pour établir ce point, il suffit de remarquer que dans un système déterminé de coordonnées tétraédriques où les trois premiers sommets du tétraèdre de référence sont A, B, C et où M a comme coordonnées x_1, y_1, z_1, 0, il y a un point P et un seul qui a comme coordonnées x, y, z, 0 (§ 224) ; ce point P a ensuite comme coordonnées x, y, z, 0 dans tous les autres systèmes de coordonnées tétraédriques analogues ; par conséquent, il n'y a dans aucun de ces systèmes de point autre que P qui puisse avoir comme coordonnées x, y, z, 0 ; la thèse se trouve ainsi établie.

Remarques. Pour qu'un système de coordonnées trilinéaires soit déterminé, il suffit, d'après ce que nous venons de voir, qu'on donne le triangle de référence et les coordonnées d'un point de son plan non situé sur l'une des droites constituées par ses côtés.

Supposons donnés dans un plan à distance finie un point à distance finie O et un système de deux axes coordonnés rectangulaires ou obliques OXY ayant O comme origine. Soit M le point du plan OXY dont les coordonnées cartésiennes non homogènes par rapport aux axes OXY sont 1, 1. Soient A et B les points à l'infini sur OX et OY respectivement. Prenons comme triangle de référence le triangle ABO et comme coordonnées trilinéaires de M les nombres 1, 1, 1. Je dis que les coordonnées trilinéaires d'un point P du plan OXY ne diffèrent que par un facteur de proportionnalité des coordonnées homogènes du même point par rapport aux axes OXY ; en effet.

Soit OZ une semi-droite passant par O non située dans le plan OXY et soit D le point à l'infini sur OZ. Soit N le point qui a comme coordonnées cartésiennes non

homogènes par rapport aux axes OXYZ 1, 1, 1. Considérons le système de coordonnées tétraédriques où le tétraèdre de référence est ABOD et où N a comme coordonnées 1, 1, 1, 1. Soient x, y, z, u les coordonnées tétraédriques d'un point quelconque de l'espace et ξ, η, ζ ε les coordonnées homogènes du même point par rapport aux axes OXYZ. On trouve aisément

(1) $$\xi = x, \eta = y, \varepsilon = z, \zeta = u.$$

Les coordonnées homogènes de M par rapport aux axes OXYZ sont $\xi = 1$, $\eta = 1$, $\zeta = 0$, $\varepsilon = 1$. Les coordonnées tétraédriques de M sont, d'après (1), $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, $u = 0$. Par conséquent les coordonnées trilinéaires d'un point quelconque du plan OXY sont égales aux trois premières coordonnées tétraédriques du même point, c. à d. à ξ, η, ε respectivement. Mais il est clair que ξ, η, ε ne sont autres que les coordonnées homogènes du point considéré par rapport aux axes OXY. La thèse est ainsi établie.

Il résulte de ce qui vient d'être prouvé que les coordonnées homogènes planes sont un cas particulier des coordonnées trilinéaires.

230. Théorème. *Par rapport au triangle de référence* ABC *les coordonnées de* A *sont* a, 0, 0, *celles de* B 0, b, 0 *et celles de* C 0, 0, c. *Les nombres* a, b, c *sont différents de zéro.*

231. Théorème. *Supposons donnés dans un même plan deux systèmes de coordonnées trilinéaires quelconques. Soient* x, y, z *les coordonnées d'un point quelconque dans le premier système et* x', y', z' *les coordonnées du même point dans le second. On a*

(1) $$\begin{cases} x = a_1x' + b_1y' + c_1z', \\ y = a_2x' + b_2y' + c_2z', \\ z = a_3x' + b_3y' + c_3z', \end{cases}$$

les a, *les* b *et les* c *étant des constantes déterminées à moins d'un seul facteur de proportionnalité près, quand les deux systèmes de coordonnées trilinéaires sont donnés. Le déterminant formé avec les* a, *les* b *et les* c *est différent de zéro.*

Démonstration. On démontre aisément qu'il existe des constantes a_1, b_1, c_1, a_2, ... telles que les formules de transformation (1) soient valables et telles que le déterminant formé avec ces constantes soit différent de zéro au moyen du § 225 On montre ensuite que ces constantes sont déterminées à moins d'un facteur de proportionnalité près en considérant les coordonnées dans le premier système des sommets du deuxième triangle de référence ainsi que les équations dans le deuxième système des côtés du premier triangle de référence.

232 Théorème. *En coordonnées trilinéaires une droite est représentée par une équation linéaire et homogène et réciproquement; une conique est représentée par une équation homogène du second degré et toute équation homogène du second degré représentant une ligne réelle représente une conique, pourvu qu'on prenne la notion de conique dans le sens plus général qu'elle obtient en géométrie analytique après l'introduction des éléments à l'infini.*

233. Théorème. *Supposons donné un système de coordonnées trilinéaires et soit* ABC *le triangle de référence. Les droites* BC, AC *et* AB *ont respectivement comme équations* $x=0$, $y=0$ *et* $z=0$.

234. Définitions. On appelle *faisceau de rayons* l'ensemble des droites passant par un même point et situées dans un même plan; le point est le *centre* du faisceau et une droite appartenant au faisceau est appelée un *rayon* du faisceau.

En géométrie projective on a l'habitude d'appeler *ponctuelle* toute droite qui est considérée plutôt comme un ensemble de points que comme rayon d'un faisceau.

On appelle *faisceau de plans* l'ensemble des plans passant par une même droite; cette droite est *l'axe* du faisceau.

En géométrie projective on a l'habitude d'appeler *système plan* tout plan considéré plutôt comme un ensemble de points que comme élément d'un faisceau de plans.

On appelle *gerbe* l'ensemble des droites passant par un

même point. Une droite appartenant à une gerbe est appelée un *rayon* de la gerbe.

Les ponctuelles et les faisceaux de rayons et de plans sont appelés *formes de première espèce;* les systèmes plans et les gerbes sont appelés *formes de seconde espèce;* l'espace entier est appelé *forme de troisième espèce.* Par *élément* d'une forme on entend un point d'une ponctuelle, un rayon d'un faisceau de rayons, un plan d'un faisceau de plans, un point d'un système plan, un rayon d'une gerbe, ou un point de l'espace suivant que la forme considérée est une ponctuelle, un faisceau de rayons, etc...

235. Définition. Supposons donnée une droite à distance finie et deux points fixes distincts à distance finie O et O′ sur cette droite. Soit A un point quelconque de la droite. Désignons par k le rapport des valeurs algébriques des mesures des segments (OA) et (O′A) ; ce rapport est indépendant du sens positif choisi sur la droite. Quand A tend vers O′, k tend vers ∞ ; posons par convention $k = \infty$ lorsque A coïncide avec O′. Il n'y a aucun point à distance finie sur la droite pour lequel on a $k = +1$, mais quand A s'éloigne indéfiniment dans l'un ou l'autre sens, k tend vers $+1$. Disons par convention que lorsque A coïncide avec le point à l'infini sur la droite, on a $k = +1$. Nous avons ainsi établi une correspondance parfaite entre tous les points de la droite et toutes les valeurs de k, la valeur ∞ comprise. Le nombre k ainsi défini s'appelle le *rapport de section* de A par rapport aux origines O et O′.

236. Définition. Supposons données deux semi-droites a et b ayant des supports distincts et passant par un même point S à distance finie. Soit c une droite quelconque passant par S et située dans le plan de a et de b. Désignons par k le rapport $\frac{\sin(a, c)}{\sin(b, c)}$; ce rapport est indépendant du sens positif choisi sur c et du sens de rotation positif choisi dans le plan ab. Quand c tend vers le support de b, k tend vers l'infini ; posons par convention $k = \infty$ lorsque c coïncide avec le support de b. Le nombre k ainsi défini s'appelle le *rapport de section* de c par rapport aux origines a et b.

Théorème. *Il y a une correspondance parfaite entre toutes les positions de c et toutes les valeurs réelles de son rapport de section, la valeur* ∞ *comprise.*

Démonstration. Soit s une semi-droite fixe située dans le plan ab, ne passant pas par S et coupant a et b à distance finie en A et B

Supposons d'abord que c ne coïncide pas avec le support de b et ne soit pas parallèle à s; soit C le point d'intersection de c et de s. On a

$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin(a,c)} = \frac{\mathrm{SC}}{\sin(a,s)},$$

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin(b,c)} = \frac{\mathrm{SC}}{\sin(b,s)},$$

$$(1) \qquad \frac{\sin(a,c)}{\sin(b,c)} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} \cdot \frac{\sin(a,s)}{\sin(b,s)}.$$

Il y a une correspondance parfaite entre toutes les positions de c où c est distinct du support de b et n'est pas parallèle à s et toutes les positions de C où C est distinct de B et du point à l'infini sur s; ensuite il y a une correspondance parfaite entre toutes ces positions de C et les valeurs de $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}$ différentes de ∞ et de $+1$ (§ 235); enfin il y a une correspondance parfaite entre les valeurs de $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}$ différentes de ∞ et de $+1$ et les valeurs de $\frac{\sin(a,c)}{\sin(b,c)}$ différentes de ∞ et de $\frac{\sin(a,s)}{\sin(b,s)}$. Si d'autre part c est parallèle à s, il est clair que le rapport de section de c est $\frac{\sin(a,s)}{\sin(b,s)}$ et si c coïncide avec b, son rapport de section est ∞.

Le théorème est ainsi complètement établi.

Remarque. Désignons maintenant par C le point d'intersection de c et de s pour une position quelconque de c. Soient k et k_1 les rapports de section de c et de C par rapport aux origines a, b et A, B respectivement;

d'après (1) on a $k = k_1 \dfrac{\sin(a, s)}{\sin(b, s)}$ et cette relation reste valable lorsque c est parallèle à s.

237. Définition Supposons donnés deux plans distincts à distance finie α et β passant par une même droite s à distance finie ; soit γ un plan quelconque passant par s. Un plan à distance finie perpendiculaire à s coupe s en S, et coupe α, β et γ suivant des droites a, b et c. Associons à a et à b des sens positifs déterminés. Le rapport de section de c par rapport aux origines a et b est indépendant de S; ce rapport de section est par définition le *rapport de section* de γ par rapport aux origines α et β.

On voit immédiatement au moyen du § 236 qu'il y a une correspondance parfaite entre toutes les positions de γ et toutes les valeurs réelles de son rapport de section, la valeur ∞ comprise.

238. Définitions. Supposons donnée une ponctuelle à l'infini. Soient A et B deux points distincts de cette ponctuelle et C un point quelconque de la ponctuelle. Soit S un point à distance finie. Les droites SA, SB et SC sont situées dans un même plan. Associons à chacune des droites SA et SB un sens positif déterminé. Soit k le rapport de section de SC par rapport aux semi-droites origines SA et SB. k est indépendant de S et ne dépend que de A, B et C, pourvu que l'on choisisse toujours les mêmes sens positifs sur SA et SB. k est par définition le *rapport de section* de C par rapport aux origines A et B.

Supposons donné un faisceau de rayons dont le centre est à l'infini mais dont le plan est à distance finie. Soient a et b deux rayons distincts fixes à distance finie de ce faisceau et c un rayon quelconque du faisceau. Soit s une droite à distance finie n'appartenant pas au faisceau mais située dans son plan. s coupe a, b et c respectivement en A, B et C; A et B sont à distance finie. Le rapport de section de C par rapport à A et B est indépendant de s et ne dépend que de a, b et c; ce rapport de section est par définition le *rapport de section* de c par rapport aux origines a et b.

On définit le *rapport de section* d'un plan d'un faisceau de plans ayant son axe à l'infini par rapport à deux éléments origines du faisceau, distincts et à distance finie, de la même manière que le rapport de section d'un rayon d'un faiseau de rayons dont le centre est à l'infini.

Supposons donné un faisceau de rayons dont le plan est à l'infini. Soient a et b deux rayons distincts fixes du faisceau et c un rayon quelconque du faisceau Soit O le centre du faisceau. Soit s une droite à distance finie passant par O. Soient α, β, γ les plans déterminés respectivement par s et a, s et b, s et c. Le rapport de section de γ par rapport à α et β est indépendant du choix de s. Ce rapport de section est par définition le *rapport de section* de c par rapport aux origines a et b.

On voit aisément qu'il existe toujours une correspondance parfaite entre toutes les valeurs du rapport de section d'un élément de l'une des quatre formes de première espèce considérées dans ce paragraphe, la valeur ∞ comprise, et toutes les positions de cet élément.

239. Définition. Supposons donnés dans un certain ordre quatre éléments distincts A_1, A_2, A_3, A_4 d'une forme de première espèce Désignons par r le quotient du rapport de section de A_3 par celui de A_4, les origines étant A_1 et A_2 Remarquons que s'il faut associer à A_1 et à A_2 des sens déterminés pour définir le rapport de section, r est indépendant de ces sens ; remarquons de plus que les rapports de section de A_3 et de A_4 sont tous les deux finis et différents de zéro. Convenons enfin, si l'un des éléments A_1 ou A_2, par exemple A_1, ne peut pas être pris comme origine, de prendre comme valeur de r la limite de la valeur qu'on obtient en remplaçant A_1 par un élément variable pouvant être pris comme origine et tendant vers A_1 ; on voit d'ailleurs aisément que cette limite est finie et différente de zéro. Cela étant, r a toujours une valeur déterminée finie non nulle. Le nombre r est appelé le *rapport anharmonique* des éléments A_1, A_2, A_3, A_4 ; on le désigne par $(A_1A_2A_3A_4)$ D'après cette définition, on a dans le cas d'une ponctuelle à

distance finie

$$(A_1A_2A_3A_4) = \frac{A_1A_3}{A_2A_3} : \frac{A_1A_4}{A_2A_4}.$$

240. Théorème. *Si* A_1, A_2, A_3 *et* A_4 *sont quatre éléments d'une forme de première espèce, on a toujours*

$$(A_1A_2A_3A_4) = \frac{1}{(A_2A_1A_3A_4)} = \frac{1}{(A_1A_2A_4A_3)} = (A_3A_4A_1A_2).$$

241. Théorème. *Si le rapport anharmonique d'un groupe de quatre éléments distincts d'une forme de première espèce est égal au rapport anharmonique d'un deuxième groupe de quatre éléments distincts de la même forme, et si trois des quatre éléments du premier groupe coïncident avec les trois éléments de même rang dans le deuxième groupe, le quatrième élément du premier groupe coïncide avec le quatrième du second.*

Démonstration. Supposons par exemple

$$(A'BCD) = (ABCD).$$

On a

$$(CDA'B) = (CDAB) \qquad (\S\ 240).$$

Le rapport de section de A' par rapport aux origines C et D est donc égal à celui de A, et par conséquent A' coïncide avec A. C. q. f. d.

242. Théorème. *Supposons donnés trois points distincts à distance finie en ligne droite* A, C *et* D, A *étant entre* C *et* D. *Soit* B *un point quelconque de la droite* CD; *supposons que* B *parcourt toute la droite* CD, *en se mouvant dans le sens allant de* C *vers* D. *Quand* B *se déplace du point à l'infini à* C, (ABCD) *décroît de* $\frac{AC}{AD}$ *à* $-\infty$; *quand* B *se déplace de* C *à* A, (ABCD) *décroît de* $+\infty$ *à* $+1$; *quand* B *se déplace de* A *à* D, (ABCD) *décroît de* $+1$ *à* 0; *quand* B *se déplace de* D *jusqu'au point à l'infini,* (ABCD) *décroît de* 0 *à* $\frac{AC}{AD}$.

243. Définitions. Lorsque le rapport anharmonique de quatre éléments distincts A_1, A_2, A_3, A_4 d'une forme de première espèce est égal à -1, il est dit *harmonique*. On

voit aisément d'après le § 240 que si le rapport anharmonique de A_1, A_2, A_3, A_4 est harmonique, cela constitue une propriété des deux couples d'éléments A_1, A_2 et A_3, A_4 indépendante de l'ordre dans lequel sont placés les deux couples, ainsi que de l'ordre dans lequel on place les deux éléments dans chaque couple.

Lorsque $(A_1A_2A_3A_4) = -1$, on dit que les éléments A_1 et A_2 sont *conjugués harmoniques* par rapport à A_3 et A_4, et inversement.

244. Théorème. *Soient* α, β, γ, δ *quatre plans distincts d'un faisceau de plans*, a, b, c, d *quatre rayons distincts d'un faisceau de rayons, et* A, B, C, D *quatre points distincts d'une ponctuelle. Si* a, b, c, d *sont situés respectivement dans* α, β, γ, δ *et si* A, B, C, D *sont respectivement sur* a, b, c, d, *on a* $(\alpha\beta\gamma\delta) = (abcd) = (\mathrm{ABCD})$.

Démonstration. Soient l l'axe du faisceau de plans, S le centre du faisceau de rayons, s le support de la ponctuelle, et σ le plan des droites a, b, ... Supposons d'abord l, S, s, A, B, C, D à distance finie. On a

$$\frac{\sin(a,c)}{\sin(b,c)} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} \cdot \frac{\sin(a,s)}{\sin(b,s)}, \quad (\S\ 236)$$

$$\frac{\sin(a,d)}{\sin(b,d)} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}} \cdot \frac{\sin(a,s)}{\sin(b,s)},$$

$$\frac{\sin(a,c)}{\sin(b,c)} : \frac{\sin(a,d)}{\sin(b,d)} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} : \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}},$$

$$(abcd) = (\mathrm{ABCD}).$$

Soit σ' un plan à distance finie normal à l et ne passant pas par S; σ' coupe α, β, γ, δ suivant a', b', c', d'; a et a' se coupent en A', b et b' en B', c et c' en C', d et d' en D'. A', B', C', D' sont situés sur l'intersection de σ et de σ'. D'après ce qui vient d'être démontré, on a

$$(abcd) = (\mathrm{A'B'C'D'}),$$

$$(a'b'c'd') = (\mathrm{A'B'C'D'}).$$

On a aussi

$$(a'b'c'd') = (\alpha\beta\gamma\delta) \quad (\S\ 237)$$

On a donc $(abcd) = (\alpha\beta\gamma\delta)$, et le théorème est établi.

On traite sans difficulté les cas où ces raisonnements ne sont plus directement valables.

245. Définition. Supposons données deux formes de première espèce ; choisissons dans chacune des deux formes deux éléments déterminés comme origines Désignons respectivement par k et k' les rapports de section par rapport aux origines choisies d'un élément quelconque de la première forme et d'un élément quelconque de la seconde.

Supposons k' exprimé en fonction de k par une relation de la forme

$$(1) \qquad k' = \frac{ak+b}{ck+d},$$

$ad - bc$ étant différent de zéro.

Si l'on a $c = 0$, on a $d \neq 0$, $a \neq 0$ et $\lim\limits_{k=\infty} k' = \infty$. Posons par définition $k' = \infty$ pour $k = \infty$.

Si $c \neq 0$, on a $ck + d = 0$ et $ak + b \neq 0$ pour $k = -\frac{d}{c}$; $\lim\limits_{k=-\frac{d}{c}} k' = \infty$. Posons par définition $k' = \infty$ pour $k = -\frac{d}{c}$. On a ensuite $\lim\limits_{k=\infty} k' = \frac{a}{c}$. Posons par définition $k' = \frac{a}{c}$ pour $k = \infty$.

Ces conventions faites, il répond à chaque valeur de k, finie ou égale à ∞, une seule valeur de k', finie ou égale à ∞. De plus, on voit aisément que si l'on donne à k deux valeurs différentes, il y répond deux valeurs différentes de k', et que si k passe par toutes les valeurs réelles, la valeur ∞ comprise, k' passe aussi par toutes les valeurs réelles, la valeur ∞ comprise.

La relation (1) fait donc correspondre à chaque élément de la première forme un élément et un seul de la seconde. A deux éléments distincts dans la première forme répondent deux éléments distincts dans la seconde, et si un élément variable coïncide successivement avec tous les éléments de la première forme, son correspondant coïncidera successivement avec tous les éléments de la seconde.

La transformation des éléments de la première forme dans les éléments de la seconde fournie par la relation (1) est dite *projective*. D'après cette définition, deux formes de première espèce transformées projectivement l'une dans l'autre ne doivent pas être de même nature; l'une peut par exemple être une ponctuelle et l'autre un faisceau.

Remarquons en passant que si dans (1) l'on avait $ad - bc = 0$, on aurait $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \lambda$, $k' = \lambda$. k' serait constant, et à tous les éléments de la première forme correspondrait un seul et même élément dans la seconde.

246. Théorème. *Etant donnée une transformation projective d'une forme de première espèce dans une autre, la transformation par laquelle on passe de la seconde forme à la première est aussi projective.*

Démonstration. On a $k' = \frac{ak + b}{ck + d}$ et $ad - bc \neq 0$. En résolvant cette relation par rapport à k, on trouve

$$k = \frac{(-d)k' + b}{ck' + (-a)}.$$

On a de plus

$$(-d)(-a) - bc = ad - bc \neq 0.$$

De là résulte le théorème.

247. Définitions. Deux éléments correspondants dans une transformation projective d'une forme de première espèce dans une autre sont dits aussi *homologues*.

Si A et A′, B et B′, C et C′, ... sont des couples d'éléments homologues dans une transformation projective d'une forme de première espèce dans une autre, on écrit

$$(A, B, C, ...) \overline{\wedge} (A', B', C', ...).$$

On dit aussi que les suites d'éléments A, B, C, ... et A′, B′, C′, ... sont *projectives*.

Etant donnés différents points O, O_1, A, B, C, ..., on désigne la suite des droites obtenues en projetant A, B, C, ... de O par O(A, B, C, ...) et la suite des plans obtenus en projetant A, B, C, ... de la droite OO_1 par OO_1(A, B, C, ...).

Si par exemple les droites OA, OB, OC, ... d'un faisceau de rayons ont pour homologues les plans $O'O_1'A'$, $O'O_1'B'$, $O'O_1'C'$, ... d'un faisceau de plans dans une transformation projective, on écrit

$$O(A, B, C, ...) \barwedge O'O'_1(A', B', C', ...).$$

248. Théorème. *Si* A_1, A_2, A_3, A_4 *sont des éléments distincts d'une forme de première espèce et* A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 *des éléments d'une autre forme de première espèce, et si* $(A_1, A_2, A_3, A_4) \barwedge (A'_1, A'_2, A'_3, A'_4)$, *on a* $(A_1A_2A_3A_4) = (A'_1A'_2A'_3A'_4)$.

Démonstration. Supposons d'abord que les deux formes soient des ponctuelles à distance finie. Soient O et O_1 les origines et M un élément fixe à distance finie dans la première forme, k_1, k_2, k_3, k_4 les rapports de section de A_1, A_2, A_3, A_4 et k'_1, k'_2, k'_3, k'_4 ceux de A'_1, A'_2, A'_3, A'_4. On a en général (exceptions aisées à traiter)

$$(A_1A_2A_3A_4) = \frac{A_1A_3}{A_2A_3} : \frac{A_1A_4}{A_2A_4} = \frac{MA_3 - MA_1}{MA_3 - MA_2} : \frac{MA_4 - MA_1}{MA_4 - MA_2},$$

$$k_1 = \frac{OA_1}{O_1A_1} = \frac{MA_1 - MO}{MA_1 - MO_1},$$

$$MA_1 = \frac{k_1MO_1 - MO}{k_1 - 1},$$

$$MA_2 = \frac{k_2MO_1 - MO}{k_2 - 1},$$

$$MA_3 = \frac{k_3MO_1 - MO}{k_3 - 1},$$

$$MA_4 = \frac{k_4MO_1 - MO}{k_4 - 1},$$

$$(A_1A_2A_3A_4) = \frac{\dfrac{k_3MO_1 - MO}{k_3 - 1} - \dfrac{k_1MO_1 - MO}{k_1 - 1}}{\dfrac{k_3MO_1 - MO}{k_3 - 1} - \dfrac{k_2MO_1 - MO}{k_2 - 1}} : \frac{\dfrac{k_4MO_1 - MO}{k_4 - 1} - \dfrac{k_1MO_1 - MO}{k_1 - 1}}{\dfrac{k_4MO_1 - MO}{k_4 - 1} - \dfrac{k_2MO_1 - MO}{k_2 - 1}}$$

$$(A_1A_2A_3A_4) = \frac{k_1 - k_3}{k_2 - k_3} : \frac{k_1 - k_4}{k_2 - k_4},$$

$$(A'_1A'_2A'_3A'_4) = \frac{k'_1 - k'_3}{k'_2 - k'_3} : \frac{k'_1 - k'_4}{k'_2 - k'_4},$$

$$k'_1 = \frac{ak_1 + b}{ck_1 + d}, \quad k'_2 = \frac{ak_2 + b}{ck_2 + d},$$

$$k'_3 = \frac{ak_3 + b}{ck_3 + d}, \quad k'_4 = \frac{ak_4 + b}{ck_4 + d}.$$

En remplaçant k'_1, k'_2, k'_3 et k'_4 par leurs valeurs dans l'expression de $(A'_1A'_2A'_3A'_4)$, on trouve

$$(A'_1A'_2A'_3A'_4) = (A_1A_2A_3A_4).$$

Supposons maintenant que les deux formes soient des faisceaux de rayons dont les centres sont à distance finie. Désignons actuellement par a_1, a_2, a_3 et a_4 les quatre rayons donnés dans le premier faisceau et par a'_1, a'_2, a'_3 et a'_4 leurs homologues dans le second. Nous désignons encore les rapports de section des quatre premiers rayons par k_1, k_2, k_3 et k_4, et ceux des quatre derniers par k'_1, k'_2, k'_3 et k'_4

Une droite s située à distance finie dans le plan du premier faisceau, ne passant pas par son centre et non parallèle aux rayons origines coupe a_1, a_2, a_3 et a_4 en A_1, A_2, A_3 et A_4 ; une droite s' analogue à s coupe a'_1, a'_2, a'_3 et a'_4 en A'_1, A'_2, A'_3 et A'_4. Choisissons comme origines sur s et s' les intersections de ces droites avec les rayons origines dans les faisceaux correspondants. Les rapports de section de A_1. A_2, A_3, A_4, A'_1, A'_2, A'_3 et A'_4 seront respectivement de la forme qk_1, qk_2, qk_3, qk_4, $q'k'_1$, $q'k'_2$, $q'k'_3$ et $q'k'_4$ (§ 236). On a

$$k'_1 = \frac{ak_1 + b}{ck_1 + d},$$

$$q'k'_1 = \frac{aq'qk_1 + bqq'}{cqk_1 + dq}.$$

$q'k'_1$ et qk_1 satisfont donc à la relation

$$k' = \frac{aq'k + bqq'}{ck + dq}.$$

$q'k'_2$ et qk_2, $q'k'_3$ et qk_3, $q'k'_4$ et qk_4 satisfont de même à cette relation. On a donc

$$(A_1, A_2, A_3, A_4) \,\overline{\wedge}\, (A'_1, A'_2, A'_3, A'_4).$$

D'après ce qui a été établi on a donc

$$(A_1A_2A_3A_4) = (A'_1A'_2A'_3A'_4).$$

Par conséquent

$$(a_1a_2a_3a_4) = (a'_1a'_2a'_3a'_4) \quad (\S\ 244).$$

Le théorème étant établi dans ces deux cas, on traite tous les autres cas sans la moindre difficulté.

249. THÉORÈME. *Etant donnés trois éléments distincts* A_1, A_2 *et* A_3 *d'une forme de première espèce et trois éléments distincts* A'_1, A'_2 *et* A'_3 *d'une deuxième forme de première espèce, il existe une transformation projective de la première forme dans la deuxième et une seule qui porte* A_1 *en* A'_1, A_2 *en* A'_2 *et* A_3 *en* A'_3.

DÉMONSTRATION. Choisissons dans chacune des deux formes deux éléments fixes comme origines; soient k_1, k_2 et k_3 les rapports de section de A_1, A_2 et A_3 et k'_1, k'_2 et k'_3 ceux de A'_1, A'_2 et A'_3. On voit aisément qu'on peut trouver quatre nombres a, b, c et d tels que $k'_1 = \frac{ak_1 + b}{ck_1 + d}$, $k'_2 = \frac{ak_2 + b}{ck_2 + d}$ et $k'_3 = \frac{ak_3 + b}{ck_3 + d}$. On a $ad - bc \neq 0$, puisque à trois valeurs différentes de k répondent trois valeurs différentes de $\frac{ak + b}{ck + d}$ (§ 245). La transformation $k' = \frac{ak + b}{ck + d}$ satisfait donc à la question.

Soit A_4 un élément quelconque de la première forme. Son homologue A'_4 dans une transformation quelconque satisfaisant à la question satisfait à

$$(A_1A_2A_3A_4) = (A'_1A'_2A'_3A'_4) \qquad (\S\ 248).$$

A_4 a donc le même homologue dans toutes les transformations satisfaisant à la question (§ 241). Il n'y a donc qu'une transformation satisfaisant à la question.

C. q. f. d.

250 THÉORÈME. *Toute transformation d'une forme de première espèce dans une autre dans laquelle le rapport anharmonique de quatre éléments distincts quelconques reste invariant est projective.*

Démonstration. Soient A_1, A_2 et A_3 trois éléments fixes de la première forme, A_4 un élément quelconque de cette forme. A'_1, A'_2, A'_3 et A'_4 les transformés de A_1, A_2, A_3 et A_4 dans la transformation donnée. Soit A''_4 l'homologue de A_4 dans la transformation projective qui porte A_1 en A'_1, A_2 en A'_2 et A_3 en A'_3 (§ 249). On a par hypothèse

$$(A_1A_2A_3A_4) = (A'_1A'_2A'_3A'_4).$$

On a de plus

$$(A_1A_2A_3A_4) = (A'_1A'_2A'_3A''_4) \quad (\text{§ } 248).$$

A'_4 coïncide donc avec A''_4 (§ 241). C. q. f. d.

Remarque. Grâce aux §§ 248 et 250 nous avons trouvé une propriété caractéristique pour les transformations projectives qui est indépendante des origines choisies pour la détermination des rapports de section.

251. Théorème. *Si l'on passe d'une première forme de première espèce à une autre par une transformation projective et de la seconde à une troisième par une transformation de même nature, la transformation par laquelle on passe de la première forme à la troisième sera aussi projective.*

Démonstration. Le théorème résulte directement des §§ 248 et 250.

252. Définition. Supposons donnés deux systèmes plans; choisissons dans chacun d'eux un système de coordonnées trilinéaires. Désignons respectivement par x, y, z et par x', y', z' les coordonnées trilinéaires d'un point quelconque du premier système plan et d'un point quelconque du second.

Supposons x', y' et z' exprimés en fonction de x, y et z par des relations de la forme

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1z, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2z, \\ z' &= a_3x + b_3y + c_3z, \end{aligned} \right.$$

le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

étant différent de zéro.

Etant donné un système de valeurs non toutes nulles de x, y et z, il y répond un système unique de valeurs non toutes nulles de x', y' et z', et étant donné un système de valeurs non toutes nulles de x', y' et z', il y répond un système unique de valeurs non toutes nulles de x, y et z; ce dernier point résulte du fait que, le déterminant des coefficients de x, y et z étant différent de zéro, on peut toujours résoudre, et d'une seule manière, les équations (1) par rapport à x, y et z.

Les relations (1) font donc correspondre à chaque point du premier système plan un point et un seul dans le second. A deux points distincts dans le premier système plan répondent deux points distincts dans le second, et si un point variable coïncide successivement avec tous les points du premier système plan, son correspondant coïncidera successivement avec tous les points du second.

La transformation des points du premier système plan dans les points du second définie par les relations (1) est dite *projective*.

253. Théorème. *Etant donnée une transformation projective d'un système plan dans un autre, la transformation par laquelle on passe du second au premier est aussi projective.*

Démonstration. On établit aisément le théorème en résolvant les relations (1) du § 252 par rapport à x, y et z.

Remarque. Supposons donnée une transformation projective d'un système plan dans un autre. Changeons dans l'un des deux systèmes plans le système de coordonnées trilinéaires. Les formules de transformation des coordonnées trilinéaires sont linéaires et homogènes (§ 231); les relations exprimant les coordonnées d'un point du second système plan en fonction de celles d'un point du premier dans la transformation projective donnée seront donc encore de la forme (1) quand on se sert du nouveau système de coordonnées trilinéaires.

254. Définition. Deux points correspondants dans une transformation projective d'un système plan dans un autre sont encore appelés *homologues*.

255. THÉORÈME. *Etant données une transformation projective d'un système plan dans un deuxième et une du deuxième dans un troisième, la transformation par laquelle on passe du premier système plan au troisième est projective.*

DÉMONSTRATION. Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque du premier système plan, x', y', z' celles de son homologue dans le second, et x'', y'', z'' celles de l'homologue de x', y', z' dans le troisième système plan. En remplaçant x', y', z' par leurs valeurs en fonction de x, y, z dans les expressions de x'', y'', z'', on constate que x'', y'', z'' sont des fonctions linéaires et homogènes de x, y, z. De plus, le déterminant des coefficients de x, y, z dans les expressions de x'', y'', z'' en fonction de x, y, z est le produit des déterminants des coefficients de x, y, z dans les expressions de x', y', z' et des coefficients de x', y', z' dans les expressions de x'', y'', z'' en fonction de x', y', z'. Ce déterminant est donc différent de zéro, et la transformation par laquelle on passe du premier système plan au troisième est projective. C. q. f. d.

256. THÉORÈME. *Etant donnée une transformation projective d'un système plan dans un autre, si un point décrit une droite dans le premier système plan, son homologue décrit une droite dans le second; si un point décrit une conique dans le premier système plan, son homologue décrit une conique dans le second.*

DÉMONSTRATION. Pour démontrer le théorème, il suffit de remarquer que le degré d'une équation algébrique n'est pas altéré par la substitution (1) du § 252 et d'appliquer le § 232.

DÉFINITION. Si a est une droite décrite par un point A dans le premier système plan, et si a' est la droite décrite par l'homologue du point A dans le second système, les droites a et a' sont dites *homologues*

257. THÉORÈME. *Supposons donnée une transformation projective d'un système plan dans un autre. Si* A_1, A_2, A_3 *et* A_4 *sont quatre points distincts en ligne droite du premier système plan et* A'_1, A'_2, A'_3 *et* A'_4 *leurs homologues*

dans le second, on a $(A_1A_2A_3A_4) = (A'_1A'_2A'_3A'_4)$; *si* d_1, d_2, d_3 *et* d_4 *sont quatre droites distinctes passant par un même point dans le premier système plan et* d'_1, d'_2, d'_3 *et* d'_4 *leurs homologues dans le second, on a* $(d_1d_2d_3d_4) = (d'_1d'_2d'_3d'_4)$.

Démonstration. 1°) Supposons d'abord que les points A_1, A_2, A_3. A_4, A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 soient à distance finie. Les deux systèmes plans sont alors à distance finie. Soient O et O′ deux points à distance finie situés sur A_1A_2 et $A'_1A'_2$ respectivement. Soient OX une semi-droite appartenant à A_1A_2, OY une semi-droite passant par O, située dans le premier système plan et n'appartenant pas à A_1A_2, O′X′ une semi-droite appartenant à $A'_1A'_2$ et O′Y′ une semi-droite passant par O′, n'appartenant pas à $A'_1A'_2$ et située dans le second système plan. Choisissons dans les deux systèmes plans deux systèmes de coordonnées trilinéaires tels que les coordonnées trilinéaires de chaque point soient égales à ses coordonnées cartésiennes homogènes par rapport aux axes OXY ou O′X′Y′ (§ 229). D'après le § 253, les formules donnant les coordonnées homogènes d'un point du second système en fonction de celles d'un point du premier seront de la forme (1), § 252. Soient x_1, 0, z_1 les coordonnées de A_1, x_2, 0, z_2 celles de A_2, x_3, 0, z_3 celles de A_3, x_4, 0, z_4 celles de A_4, x'_1, 0, z'_1 celles de A'_1, x'_2, 0, z'_2 celles de A'_2, x'_3, 0, z'_3 celles de A'_3 et x'_4, 0, z'_4 celles de A'_4. Les z et les z' sont différents de zéro. On a

$$(1) \qquad (A'_1A'_2A'_3A'_4) = \frac{\dfrac{x'_3}{z'_3} - \dfrac{x'_1}{z'_1}}{\dfrac{x'_3}{z'_3} - \dfrac{x'_2}{z'_2}} : \frac{\dfrac{x'_4}{z'_4} - \dfrac{x'_1}{z'_1}}{\dfrac{x'_4}{z'_4} - \dfrac{x'_2}{z'_2}}.$$

Au second membre de cette égalité chacune des deux fractions séparées par le signe : a un numérateur et un dénominateur différent de zéro (cf. § 239). On a ensuite

$$(A'_1A'_2A'_3A'_4) = \frac{x'_3z'_1 - x'_1z'_3}{x'_3z'_2 - x'_2z'_3} : \frac{x'_4z'_1 - x'_1z'_4}{x'_4z'_2 - x'_2z'_4},$$

$$(A'_1A'_2A'_3A'_4)=\frac{\dfrac{(a_1x_3+c_1z_3)(a_3x_1+c_3z_1)-(a_1x_1+c_1z_1)(a_3x_3+c_3z_3)}{(a_1x_3+c_1z_3)(a_3x_2+c_3z_2)-(a_1x_2+c_1z_2)(a_3x_3+c_3z_3)}}{\dfrac{(a_1x_4+c_1z_4)(a_3x_1+c_3z_1)-(a_1x_1+c_1z_1)(a_3x_4+c_3z_4)}{(a_1x_4+c_1z_4)(a_3x_2+c_3z_2)-(a_1x_2+c_1z_2)(a_3x_4+c_3z_4)}},$$

$$(2)\qquad (A'_1A'_2A'_3A'_4)=\frac{\dfrac{(a_1c_3-a_3c_1)(x_3z_1-x_1z_3)}{(a_1c_3-a_3c_1)(x_3z_2-x_2z_3)}}{\dfrac{(a_1c_3-a_3c_1)(x_4z_1-x_1z_4)}{(a_1c_3-a_3c_1)(x_4z_2-x_2z_4)}}.$$

Il suit de la remarque faite sur l'égalité (1) que les termes des deux fractions divisées l'une par l'autre au second membre de l'égalité (2) sont différents de zéro; nous sommes donc sûrs a priori que $a_1c_3-a_3c_1\neq 0$ et il vient

$$(A'_1A'_2A'_3A'_4)=\frac{x_3z_1-x_1z_3}{x_3z_2-x_2z_3}:\frac{x_4z_1-x_1z_4}{x_4z_2-x_2z_4}$$

$$=\frac{\dfrac{x_3}{z_3}-\dfrac{x_1}{z_1}}{\dfrac{x_3}{z_3}-\dfrac{x_2}{z_2}}:\frac{\dfrac{x_4}{z_4}-\dfrac{x_1}{z_1}}{\dfrac{x_4}{z_4}-\dfrac{x_2}{z_2}}=(A_1A_2A_3A_4).$$

2°) Considérons maintenant les droites d et les droites d' et supposons d'abord que le point commun aux droites d et le point commun aux droites d' soient à distance finie ; les deux systèmes plans sont alors à distance finie. Soit D_1 un point situé à distance finie sur d_1, distinct du point commun à d_1 et à d_2, et tel que son homologue D'_1 sur d'_1 soit à distance finie Soit s une droite passant par D_1, située dans le premier système plan et distincte de d_1 ; l'homologue s' de s passe par D'_1. Il y a une infinité de positions de s où s coupe d_2, d_3, d_4 à distance finie et parmi l'infinité de positions de s' qui y répondent il y en a au plus trois où s' coupe l'une des droites d'_2, d'_3, d'_4 à l'infini. Nous pouvons donc choisir pour s une position telle que s coupe d_2, d_3, d_4 respectivement en D_2, D_3, D_4, à distance finie, et que s' coupe d'_2, d'_3, d'_4 respectivement en D'_2, D_3', D'_4, à distance finie. D'_2, D'_3, D'_4 seront les

homologues de D_2, D_3, D_4 respectivement. On a

$$(D_1D_2D_3D_4) = (D'_1D'_2D'_3D'_4) \text{ (d'après le 1°)},$$
$$(d_1d_2d_3d_4) = (D_1D_2D_3D_4) \text{ (§ 244)},$$
$$(d'_1d'_2d'_3d'_4) = (D'_1D'_2D'_3D'_4) \text{ (§ 244)},$$
$$(d_1d_2d_3d_4) = (d'_1d'_2d'_3d'_4).$$

3°) Revenons maintenant aux points A et A'; supposons uniquement les deux systèmes plans à distance finie, en n'excluant pas le cas où quelques-uns des points A ou A' ou tous ces points sont à l'infini. Soit S un point à distance finie dans le premier système plan non situé sur A_1A_2 tel que son homologue S' dans le second système soit à distance finie. Désignons par a_1, a_2, a_3, a_4, a'_1. a'_2, a'_3, a'_4 les droites SA_1, SA_2, SA_3, SA_4, $S'A'_1$, $S'A'_2$, $S'A'_3$, $S'A'_4$ respectivement. a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 sont les homologues de a_1, a_2, a_3, a_4 respectivement. D'après le 2° on a $(a_1a_2a_3a_4) = (a'_1a'_2a'_3a'_4)$; il en résulte d'après le § 244 qu'on a $(A_1A_2A_3A_4) = (A'_1A'_2A'_3A'_4)$.

4°) Lorsque maintenant les points communs aux droites d et aux droites d' ne sont plus à distance finie, les deux systèmes plans étant toujours à distance finie, on montre immédiatement qu'on a $(d_1d_2d_3d_4) = (d'_1d'_2d'_3d'_4)$ en considérant deux transversales à distance finie homologues coupant respectivement les droites d et les droites d' et en se basant sur le 3°.

5°) Revenons maintenant aux points A et A'; supposons le premier système plan et tous les points A à distance finie; supposons le deuxième système plan à l'infini. Soient O un point du premier système plan situé à distance finie sur A_1A_2. OX une semi-droite passant par O et appartenant à A_1A_2 et OY une semi-droite passant par O, n'appartenant pas à A_1A_2 et située dans le premier système plan. Soient O' un point quelconque à distance finie, O'X' et O'Z' deux semi-droites perpendiculaires passant par O', situées dans le plan de O' et de $A'_1A'_2$ et ne passant pas par l'un des points A'_1, A'_2, A'_3. A'_4, et soit O'Y' une semi-droite perpendiculaire en O' au plan O'X'Z'. Soient X'_0, Y'_0, Z'_0 les points à

l'infini sur $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ respectivement. Choisissons dans le premier système plan un système de coordonnées trilinéaires tel que les coordonnées trilinéaires de tout point soient égales à ses coordonnées homogènes par rapport aux axes OXY. Choisissons dans le second système plan le triangle $X'_0Y'_0Z'_0$ comme triangle de référence. Alors les coordonnées trilinéaires d'un point quelconque du deuxième système plan seront égales à ses trois premières coordonnées tétraédriques par rapport au tétraèdre de référence $X'_0Y'_0Z'_0O'$ (§ 229). Mais nous pouvons choisir un système de coordonnées tétraédriques où le tétraèdre de référence est $X'_0Y'_0Z'_0O'$ et où les coordonnées tétraédriques d'un point quelconque de l'espace sont égales à ses coordonnées homogènes par rapport aux axes $O'X'Y'Z'$ (§ 224). Supposons un tel choix fait. Alors les coordonnées trilinéaires d'un point quelconque du plan à l'infini seront égales à ses trois premières coordonnées homogènes par rapport aux axes $O'X'Y'Z'$. Soient x_1, 0, z_1 les coordonnées de A_1, x_2, 0, z_2 celles de A_2, x_3, 0, z_3 celles de A_3, x_4, 0, z_4 celles de A_4, x'_1, 0, z'_1 celles de A'_1, x'_2, 0, z'_2 celles de A'_2, x'_3, 0, z'_3 celles de A'_3 et x'_4, 0, z'_4 celles de A'_4. Nous avons (§§ 252 et 253)

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_1x_1 + c_1z_1, & z'_1 &= a_3x_1 + c_3z_1, \\ x'_2 &= a_1x_2 + c_1z_2, & z'_2 &= a_3x_2 + c_3z_2, \\ x'_3 &= a_1x_3 + c_1z_3, & z'_3 &= a_3x_3 + c_3z_3, \\ x'_4 &= a_1x_4 + c_1z_4, & z'_4 &= a_3x_4 + c_3z_4, \end{aligned}$$

si les facteurs de proportionnalité qui entrent dans les x' et les z' sont convenablement choisis. x'_1, z'_1 sont les coordonnées cartésiennes non homogènes d'un point à distance finie de $O'A'_1$ distinct de O' par rapport aux axes $O'X'Z'$ (§ 222); des remarques analogues s'appliquent à x'_2, z'_2; x'_3, z'_3; x'_4, z'_4. Associons à $O'A'_1$ le sens positif allant de O' vers le point x'_1, z'_1; associons d'une manière analogue des sens positifs à $O'A'_2$, $O'A'_3$, $O'A'_4$. Prenons comme sens des rotations positives dans le plan $O'X'Z'$ celui de la rotation minima que $O'Z'$

doit effectuer pour coïncider avec $O'X'$. Nous aurons
$(A'_1A'_2A'_3A'_4)$ = rapport anharmonique de $O'A'_1$, $O'A'_2$, $O'A'_3$, $O'A'_4$ (§ 244).

Soient k'_1, k'_2, k'_3, k'_4 les rapports de section de $O'A'_1$, $O'A'_2$, $O'A'_3$, $O'A'_4$ par rapport à $O'Z'$ et $O'X'$. Soit t une droite située à distance finie dans le plan $O'Y'Z'$, ne passant pas par O' et coupant $O'X'$, $O'Z'$, $O'A'_1$, $O'A'_2$, $O'A'_3$, $O'A'_4$ à distance finie en X'', Z'', A''_1, A''_2, A''_3, A''_4. Soient k''_1, k''_2, k''_3, k''_4 les rapports de section de A''_1, A''_2, A''_3, A''_4 par rapport à Z'' et X''. Nous avons

rapport anharmonique de $O'A'_1$, $O'A'_2$, $O'A'_3$, $O'A'_4$

$$=(A''_1A''_2A''_3A''_4) \quad (\S\ 244),$$

$$(A''_1A''_2A''_3A''_4)=\frac{k''_1-k''_3}{k''_2-k''_3}:\frac{k''_1-k''_4}{k''_2-k''_4} \text{ (§ 248, démonstration)},$$

$$\frac{k''_1-k''_3}{k''_2-k''_3}:\frac{k''_1-k''_4}{k''_2-k''_4}=\frac{k'_1-k'_3}{k'_2-k'_3}:\frac{k'_1-k'_4}{k'_2-k'_4} \quad (\S\ 236),$$

$$k'_1=\frac{\sin(O'Z', O'A'_1)}{\sin(O'X', O'A'_1)}=\frac{\sin(O'Z', O'A'_1)}{-\cos(O'Z', O'A'_1)}$$

$$=-\operatorname{tg}(O'Z', O'A'_1)=-\frac{x'_1}{z'_1},$$

$$k'_2=-\frac{x'_2}{z'_2}, \quad k'_3=-\frac{x'_3}{z'_3}, \quad k'_4=-\frac{x'_4}{z'_4},$$

$$\frac{k'_1-k'_3}{k'_2-k'_3}:\frac{k'_1-k'_4}{k'_2-k'_4}=\frac{\frac{x'_3}{z'_3}-\frac{x'_1}{z'_1}}{\frac{x'_3}{z'_3}-\frac{x'_2}{z'_2}}:\frac{\frac{x'_4}{z'_4}-\frac{x'_1}{z'_1}}{\frac{x'_4}{z'_4}-\frac{x'_2}{z'_2}}.$$

En raisonnant exactement comme nous l'avons fait au 1°, on trouve

$$\frac{\frac{x'_3}{z'_3}-\frac{x'_1}{z'_1}}{\frac{x'_3}{z'_3}-\frac{x'_2}{z'_2}}:\frac{\frac{x'_4}{z'_4}-\frac{x'_1}{z'_1}}{\frac{x'_4}{z'_4}-\frac{x'_2}{z'_2}}=\frac{\frac{x_3}{z_3}-\frac{x_1}{z_1}}{\frac{x_3}{z_3}-\frac{x_2}{z_2}}:\frac{\frac{x_4}{z_4}-\frac{x_1}{z_1}}{\frac{x_4}{z_4}-\frac{x_2}{z_2}}=(A_1A_2A_3A_4).$$

On a donc

$$(A'_1A'_2A'_3A'_4)=(A_1A_2A_3A_4).$$

6°) Considérons ensuite les droites d et d' lorsque le premier système plan ainsi que le point commun aux

droites d est à distance finie et lorsque le deuxième système plan est à l'infini. Alors on raisonne à peu près comme au 2° (mais le raisonnement est plus simple) et l'on se base sur le 5°.

7°) Considérons les points A et A′ dans le cas où le premier système plan est à distance finie et le second à l'infini, les points A pouvant être à l'infini. Dans ce cas on raisonne comme au 3° et l'on se base sur le 6°.

8°) Considérons les droites d et d' lorsque le premier système plan est à distance finie et le second à l'infini, le point commun aux droites d pouvant être à l'infini. Alors on raisonne comme au 4° et l'on se base sur le 7°.

9°) Nous avons maintenant établi complètement le théorème lorsque l'un des deux systèmes plans est à distance finie. Considérons finalement le cas où les deux systèmes plans sont à l'infini. Soient (P) le premier et (P′) le second. On peut passer de (P) à un système plan (Q) à distance finie par une transformation projective. La transformation par laquelle on passe de (Q) à (P) est projective (§ 253); donc, celle par laquelle on passe de (Q) à (P′) l'est aussi (§ 255). Les rapports anharmoniques restent invariants lorsqu'on passe de (P) à (Q) et de (Q) à (P′); ils restent donc invariants quand on passe de (P) à (P′). Le théorème est ainsi complètement établi.

258. Théorème. *Supposons donnée une transformation projective d'un système plan dans un autre. Cette transformation transforme projectivement toute ponctuelle du premier système plan en un ponctuelle du second et tout faisceau de rayons du premier en un faisceau de rayons du second.*

Démonstration. Ce théorème résulte des §§ 257 et 250.

259. Théorème. *Supposons donnée une transformation projective d'un système plan dans un autre. Soient* (C), M *et* m *une conique du premier système, un point du premier système et sa polaire par rapport à* (C); *soient* M′ *et* m' *les homologues de* M *et de* m, *et* (C′) *la conique correspondant à* (C); m' *est la polaire de* M′ *par rapport à* (C′).

Démonstration. 1°) M est sur C. m est la tangente en M à (C). m a un seul point commun avec (C). M′ est sur (C′) et m' passe par M′. m' ne peut avoir de deuxième point commun avec (C′). m' est donc la tangente en M′ à (C′).

2°) M n'est pas sur (C). Menons par M′ une droite quelconque coupant (C′) en A′ et B′ et m' en M'_1. Soient A, B et M_1 les homologues dans le premier système plan de A′, B′ et M'_1. M_1 est sur m, A et B sont sur (C), M, A, B et M_1 sont en ligne droite. Or, la polaire d'un point situé dans le plan d'une conique, mais non sur cette conique, est le lieu des conjugués harmoniques du point par rapport aux points d'intersection avec la conique d'une sécante variable passant par le point. On a donc $(MM_1AB) = -1$; on a donc $(M'M'_1A'B') = -1$ (§ 257) et m' est la polaire de M′ par rapport à (C′).

260 Théorème. *Etant donnés quatre points* A_1, A_2, A_3 *et* A_4 *d'un système plan, trois quelconques des quatre points n'étant pas en ligne droite, et quatre points* A'_1, A'_2, A'_3 *et* A'_4 *d'un deuxième système plan, trois quelconques des quatre nouveaux points n'étant pas en ligne droite, il existe une transformation projective du premier système plan dans le second, et une seule, qui porte* A_1 *en* A'_1, A_2 *en* A'_2, A_3 *en* A'_3 *et* A_4 *en* A'_4.

Démonstration. Prenons dans le premier système plan le système de coordonnées trilinéaires où le triangle de référence est $A_1A_2A_3$ et où le point A_4 a comme coordonnées 1, 1, 1 (§ 229). Soient x, y, z les coordonnées trilinéaires d'un point quelconque du premier système plan. Prenons dans le second système plan le système de coordonnées trilinéaires où le triangle de référence est $A'_1A'_2A'_3$ et où A'_4 a comme coordonnées 1, 1, 1. Soient x', y', z' les coordonnées trilinéaires d'un point quelconque du second système plan. La transformation du premier système dans le second définie par les formules

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z$$

est projective (§ 252) et porte A_1, A_2, A_3, A_4 respectivement en A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 (§ 230). Il existe donc au moins une transformation satisfaisant à la question.

Montrons maintenant qu'il n'y a qu'une transformation satisfaisant à la question.

Soient M un point quelconque du premier système plan et M′ son homologue dans une transformation satisfaisant à la question. M n'est pas situé à la fois sur A_1A_2, A_1A_3 et A_2A_3; supposons par exemple M non situé sur A_1A_2. On a (§ 258)

$$A_1(A_2, A_3, A_4, M) \overline{\wedge} A'_1(A'_2, A'_3, A'_4, M'),$$
$$A_2(A_1, A_3, A_4, M) \overline{\wedge} A'_2(A'_1, A'_3, A'_4, M').$$

Les droites A_1M et A_2M ont donc mêmes homologues dans toutes les transformations satisfaisant à la question (§ 249). Le point M a donc même homologue dans toutes les transformations satisfaisant à la question.

C. q. f. d.

261. Définition. Prenons dans l'espace deux systèmes de coordonnées tétraédriques. Désignons les coordonnées tétraédriques d'un point quelconque de l'espace par rapport au premier système par x, y, z, u et celles d'un autre point quelconque de l'espace par rapport au second système par x', y', z', u'.

Supposons x', y', z', u' exprimés en fonction de x, y, z, u par des relations de la forme

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1u, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2u, \\ z' &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3u, \\ u' &= a_4x + b_4y + c_4z + d_4u, \end{aligned} \right.$$

le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

étant différent de zéro. On voit aisément, comme au § 252, que les relations (1) font correspondre à chaque point de l'espace un nouveau point bien déterminé. A deux points distincts correspondent deux points distincts, et si un point coïncide successivement avec tous les points de

l'espace, son correspondant coïncidera successivement avec tous les points de l'espace.

La transformation de l'espace fournie par les relations (1) est dite *projective*.

262. Théorème. *Etant donnée une transformation projective de l'espace, la nouvelle transformation par laquelle on passe de chaque point de l'espace au point dont il est le transformé dans la transformation donnée est aussi projective.*

Démonstration. On établit ce théorème de la même manière que celui du § 253.

Remarque. On voit aisément, comme au § 253, en se basant cette fois-ci sur le § 225, que la propriété d'une transformation projective de l'espace de pouvoir être représentée par des relations de la forme (1), § 261 est indépendante des systèmes de coordonnées tétraédriques employés.

263. Définition. Deux points correspondants dans une transformation projective de l'espace sont encore appelés *homologues*.

264. Théorème. *Etant données deux transformations projectives de l'espace, la transformation obtenue en faisant correspondre à chaque point l'homologue dans la deuxième transformation de son transformé dans la première est projective.*

Démonstration. Ce théorème se démontre exactement de la même manière que le théorème du § 255.

265. Théorème. *Supposons donnée une transformation projective de l'espace. Si le lieu géométrique d'un point est un plan, le lieu de son homologue est un plan; si le lieu d'un point est une quadrique, le lieu de son homologue est une quadrique.*

Démonstration. Ce théorème se démontre de la même manière que celui du § 256, en se basant cette fois-ci sur le § 226.

266. Théorème *Supposons donnée une transformation projective de l'espace. Cette transformation transforme projectivement tout système plan en un nouveau système plan.*

DÉMONSTRATION. Considérons un système plan quelconque α. La transformation donnée transforme le plan α en un autre plan α' (§ 265).

Substituons au premier système de coordonnées tétraédriques un nouveau système tel que la face du tétraèdre opposée au 4e sommet soit dans α et substituons au deuxième système de coordonnées tétraédriques un nouveau système tel que la face du tétraèdre opposée au 4e sommet soit dans α'. La transformation donnée sera représentée encore par des relations de la même forme que les relations (1) du § 261 (§ 262). Actuellement on a $a_4x + b_4y + c_4z = 0$ pour toutes les valeurs non simultanément nulles de x, y et z. On a donc $a_4 = b_4 = c_4 = 0$.

Un point quelconque de α a comme coordonnées x, y, z, 0. Pour l'homologue de ce point (x, y, z, 0) on aura $u' = 0$ et

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1z, \\ y' = a_2x + b_2y + c_2z, \\ z' = a_3x + b_3y + c_3z. \end{cases}$$

Le déterminant des a, des b, des c et des d est

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix} = d_4 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Le déterminant des coefficients de x, y et z dans les relations (1) du § 266 est donc différent de zéro. Ces relations définissent la transformation par laquelle on passe du système plan α au système α'. Cette transformation est donc projective. C. q. f. d.

267. THÉORÈME. *Supposons donnée une transformation projective de l'espace. Cette transformation transforme projectivement toute ponctuelle en une nouvelle ponctuelle et tout faisceau de rayons en un nouveau faisceau de rayons. Une conique, un point situé dans le plan de la conique et la polaire de ce point par rapport à la conique sont transformés respectivement en une nouvelle conique, un point situé dans le plan de cette dernière et la polaire de ce point par rapport à la nouvelle conique.*

Démonstration. Ce théorème résulte des §§ 258, 259 et du § 266.

268. Définition. Soient a une droite, lieu d'un point A, et β un plan, lieu d'un point B ; soient a' la droite qui est le lieu de l'homologue de A et β' le plan qui est le lieu de l'homologue de B dans une transformation projective de l'espace. Les droites a et a' ainsi que les plans β et β' sont dits *homologues* dans cette transformation.

269. Théorème. *Supposons donnée une transformation projective de l'espace. Cette transformation transforme projectivement tout faisceau de plans en un nouveau faisceau de plans.*

Démonstration. En coupant le premier faisceau de plans par une transversale, en considérant l'homologue de cette transversale et en appliquant les §§ 244, 267 et 248, on démontre que le rapport anharmonique de quatre plans d'un faisceau reste invariant dans la transformation projective de l'espace donnée. Cela étant, le théorème à démontrer résulte du § 250.

270. Théorème. *Dans une transformation projective de l'espace, une quadrique, un point et son plan polaire par rapport à la quadrique sont transformés respectivement en une nouvelle quadrique, un nouveau point et son plan polaire par rapport à la nouvelle quadrique.*

Démonstration. Soient (Q) la première quadrique, M le premier point et μ son plan polaire par rapport à (Q). Soient (Q'), M' et μ' les transformés de (Q), M et μ.

1°) M est sur (Q). μ est le plan tangent en M à (Q). Menons par M deux plans α et β distincts de μ et distincts entre eux. α et β coupent (Q) suivant deux coniques (A) et (B) et μ suivant deux droites a et b tangentes en M à (A) et à (B). Soient α', β', a', b', (A') et (B') les transformés de α, β, a, b, (A) et (B). M' est sur (Q') et μ' passe par M'. a' et b' passent par M' et sont situés dans μ'. a' et b' sont tangents en M' à (A') et (B') (§ 267). (A') et (B') sont les intersections de (Q') avec α' et β'. Donc, le plan μ' est tangent en M' à (Q'). C. q. f. d.

2°) M n'est pas sur Q. Dans ce cas on peut raisonner exactement comme nous l'avons fait au § 259, 2°.

271. Théorème. *Etant donnés cinq points* A_1, A_2, A_3, A_4 *et* A_5, *quatre quelconques des cinq points n'étant pas dans un même plan, et cinq nouveaux points* A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 *et* A'_5, *quatre quelconques des cinq nouveaux points n'étant pas dans un même plan, il existe une transformation projective de l'espace et une seule qui porte* A_1, A_2, A_3, A_4 *et* A_5 *respectivement en* A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 *et* A'_5.

Démonstration. Prenons comme premier système de coordonnées tétraédriques celui où le tétraèdre de référence est $A_1A_2A_3A_4$ et où A_5 a comme coordonnées 1, 1, 1, 1. Soient x, y, z, u les coordonnées d'un point quelconque de l'espace par rapport au premier système de coordonnées tétraédriques. Prenons comme second système celui où le tétraèdre de référence est $A'_1A'_2A'_3A'_4$ et où A'_5 a comme coordonnées 1, 1, 1, 1. Soient x', y', z', u' les coordonnées d'un point quelconque de l'espace par rapport au second système. La transformation de l'espace définie par les formules

$$x' = x,\ y' = y,\ z' = z,\ u' = u$$

est projective (§ 261) et porte A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 respectivement en A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, A'_5 (§ 224). Il existe donc au moins une transformation satisfaisant à la question.

Montrons maintenant qu'il n'y a qu'une transformation satisfaisant à la question.

Soient M un point quelconque et M' son homologue dans une transformation projective satisfaisant à la question. M n'est pas à la fois dans les quatre plans définis par les faces du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$; supposons par exemple M non situé dans le plan $A_1A_2A_3$. On a (§ 269)

$$A_1A_2(A_3, A_4, A_5, M) \overline{\wedge} A'_1A'_2(A'_3, A'_4, A'_5, M'),$$
$$A_2A_3(A_1, A_4, A_5, M) \overline{\wedge} A'_2A'_3(A'_1, A'_4, A'_5, M'),$$
$$A_1A_3(A_2, A_4, A_5, M) \overline{\wedge} A'_1A'_3(A'_2, A'_4, A'_5, M').$$

Les plans A_1A_2M, A_2A_3M et A_1A_3M ont donc mêmes homologues dans toutes les transformations satisfaisant à la question (§ 249), et M a aussi même homologue dans toutes ces transformations, les plans A_1A_2M, A_2A_3M et A_1A_3M n'ayant qu'un point commun.

272. La géométrie projective a pour objet l'étude des transformations projectives et des propriétés qui restent invariantes dans ces transformations. Nous nous bornerons ici aux notions de cette science que nous venons d'exposer. Faisons toutefois une dernière remarque avant de passer au chapitre suivant.

Projeter une ponctuelle d'un point S, c'est faire correspondre à chaque point A de la ponctuelle la droite SA. Couper un faisceau de rayons par une droite *s* située dans le plan du faisceau, c'est faire correspondre à chaque rayon *a* du faisceau le point d'intersection de *a* et de *s*. On définit de la même manière la section d'un faisceau de plans par une droite, la projection d'un système plan d'un point, etc. Ces différentes opérations de projection et de section constituent les *opérations fondamentales* de la géométrie projective. On voit aisément qu'on peut définir ces opérations fondamentales sans se servir du concept et des postulats de la congruence. On démontre que si l'on transforme une forme de première ou de seconde espèce en une autre par un nombre fini d'opérations fondamentales successives, cette transformation est projective, et que réciproquement toute transformation projective d'une forme de première ou de seconde espèce en une autre peut être considérée comme le résultat d'un nombre fini d'opérations fondamentales. Cela étant, on peut définir directement la notion de transformation projective en partant des opérations fondamentales de la géométrie projective. Par cette voie, on peut édifier la géométrie projective en laissant entièrement de côté le concept et les postulats de la congruence. Dans le présent chapitre, nous avons fait usage des concepts et des postulats de la congruence, vu que nous sommes partis des coordonnées cartésiennes d'un point (§ 222), et que ces coordonnées ne peuvent être définies sans faire appel au concept et aux postulats de la congruence. La géométrie projective édifiée sans l'aide des postulats de la congruence est une géométrie plus générale que la géométrie euclidienne et non plus une branche de celle-ci.

CHAPITRE IX.

Compatibilité de l'hypothèse de l'angle aigu avec les postulats de la géométrie générale.

273. Pour établir que l'hypothèse de l'angle aigu est compatible avec les postulats de la géométrie générale, nous allons considérer dans l'espace euclidien certaines transformations projectives d'un système plan en un autre ayant même support qui transforment en elle-même une conique donnée, et certaines transformations projectives de l'espace entier qui transforment en elle-même une quadrique donnée. Nous allons d'abord établir quelques théorèmes servant à l'étude des transformations pareilles. Les coniques et les quadriques considérées seront des ellipses et des ellipsoïdes. Les résultats que nous établirons pour ces espèces particulières de coniques et de quadriques peuvent s'étendre aux autres coniques et quadriques, mais comme nous n'aurons pas besoin de cette extension, nous ne nous y arrêterons pas.

274. Théorème. *Supposons donnés dans l'espace euclidien deux plans à distance finie* α *et* α' *et deux ellipses* (C) *et* (C') *situées respectivement dans* α *et* α'. *Toute transformation projective du système plan* α *dans le système plan* α' *qui transforme* (C) *en* (C') *et un point* O *intérieur à* (C) *en un point* O' *intérieur à* (C'), *transforme tous les points intérieurs à* (C) *dans les points intérieurs à* (C'); *elle laisse de plus invariant l'ordre de toute suite de points situés en ligne droite et intérieurs à* (C) *ou appartenant à* (C).

Démonstration. Soit A un point quelconque intérieur à (C). Soient O_1 et A_1 les points d'intersection de OA avec (C), A étant entre O et A_1, O entre A et O_1. L'homologue de la droite OA passe par O' et coupe (C') en deux points qui sont les homologues de O_1 et de A_1 ; soient O'_1 celui de

ces deux points qui est l'homologue de O_1 et A'_1 celui qui est l'homologue de A_1. L'homologue A' de A est sur $O'_1A'_1$ et on a $(OAO_1A_1) = (O'A'O'_1A'_1)$ (§ 257). (OAO_1A_1) est compris entre 0 et $+1$ (§ 242); $(O'A'O'_1A'_1)$ est aussi compris entre 0 et $+1$ et A' est entre O' et A'_1 (§ 242); A' est donc un point intérieur à (C'). Soit ensuite B un point situé entre O et A; d'après ce qui vient d'être établi, l'homologue B' de B sera entre O' et A'_1. On a $(OBO_1A_1) = (O'B'O'_1A'_1)$; de plus on a $(OBO_1A_1) > (OAO_1A_1)$ (§ 242), $(O'B'O'_1A'_1) > (O'A'O'_1A'_1)$, et B' est entre O' et A' (§ 242).

La transformation par laquelle on passe du système plan α' au système plan α est projective (§ 253) et transforme (C') en (C) et O' et O. On peut donc montrer exactement de la même manière que plus haut qu'à un point intérieur à (C') répond un point intérieur à (C) et à un point intérieur à (C') situé entre deux autres points intérieurs à ou appartenant à (C') un point intérieur à (C) situé entre deux autres points intérieurs à ou appartenant à (C).

Le théorème est donc complètement établi.

275. Théorème. *Supposons donnés dans l'espace euclidien deux plans à distance finie α et α', deux ellipses* (C) *et* (C') *situées respectivement dans α et α' et deux semi-droites qui sont situées dans α et α' et dont les origines sont intérieures à* (C) *et à* (C'). *Désignons respectivement par b et par b' les portions de ces deux semi-droites intérieures à* (C) *et à* (C'). *Considérons dans chacun des plans α et α' l'une des deux moitiés en lesquelles il est partagé par le support de b ou de b'; désignons respectivement par β et β' les portions de ces deux semi-plans intérieures à* (C) *et à* (C'). *Il existe une transformation projective du système plan α dans le système plan α' et une seule qui transforme* (C) *en* (C'), *b en b' et β en β'.*

Démonstration. Montrons d'abord qu'il existe une transformation satisfaisant à la question.

Soient O et O' les origines des semi-droites répondant à b et à b'. La première de ces semi-droites coupe (C) en N, la seconde coupe (C') en N'. Soient M et M' les seconds points d'intersection des droites ON et $O'N'$ avec (C) et

(C′) respectivement. Soient P et P′ les pôles à distance finie ou infinie de MN et de M′N′ par rapport à (C) et à (C′) respectivement. PO coupe (C) en deux points, soient S celui des deux situé du côté β de MN et R l'autre. P′O′ coupe de même (C′) en un point S′ situé du côté β' de M′N′ et en un deuxième point R′.

Parmi les quatre points M, N, P et S trois quelconques ne sont pas en ligne droite ; les quatre points M′, N′, P′ et S′ jouissent de la même propriété. Considérons la transformation projective du système plan α dans le système plan α' qui porte M en M′, N en N′, P en P′ et S en S′ (§ 260). Cette transformation porte MN en M′N′, PS en P′S′ ; le point O′, intersection de M′N′ et de P′S′, est l'homologue de O, intersection de MN et de PS. A la conique (C) correspond une conique (C″) (§ 256). (C″) passe par S′. Nous savons par la géométrie analytique que (C) est tangent en M à PM et en N à PN ; (C″) est donc tangent en M′ à P′M′ et en N′ à P′N′ (§ 259). Or, (C′) est tangent en M′ à P′M′ et en N′ à P′N′. Les deux coniques (C′) et (C″) ont donc un point commun en S′ et deux points coïncidents communs en M′ et aussi en N′. (C″) coïncide donc avec (C′).

Cela étant, on voit aisément au moyen du § 274 que b est transformé en b' et β en β'. La transformation considérée satisfait donc à la question.

D'un autre côté, on voit aisément que toute transformation satisfaisant à la question transforme O en O′, N en N′, M en M′, P en P′ et S en S′. Il n'y a donc qu'une transformation satisfaisant à la question (§ 260).

C. q. f. d.

276. Théorème. *Supposons donnés dans l'espace euclidien deux ellipsoïdes* (Q) *et* (Q′). *Toute transformation projective de l'espace qui transforme* (Q) *en* (Q′) *et un point intérieur à* (Q) *en un point intérieur à* (Q′) *transforme tous les points intérieurs à* (Q) *dans les points intérieurs à* (Q′); *elle laisse de plus invariant l'ordre de toute suite de points situés en ligne droite et intérieurs à ou appartenant à* (Q).

Démonstration. Ce théorème se démontre de la même manière que le théorème du § 274.

277. Théorème. *Supposons donnés dans l'espace euclidien deux ellipsoïdes* (Q) *et* (Q′), *deux semi-droites dont les origines sont respectivement intérieures à* (Q) *et à* (Q′), *deux demi-plans limités respectivement aux supports des deux semi-droites, et enfin un côté du support du premier demi-plan et un côté du support du deuxième demi-plan. Désignons par b et b' les portions des deux semi-droites intérieures respectivement à* (Q) *et à* (Q′), *par β et β' les portions des deux demi-plans intérieures respectivement à* (Q) *et à* (Q′) *et par Σ et Σ' les portions de l'espace situées respectivement du côté donné du support de β et du côté donné du support de β' et intérieures respectivement à* (Q) *et à* (Q′). *Il existe une transformation projective de l'espace et une seule qui transforme* (Q) *en* (Q′), *b en b', β en β' et Σ en Σ'.*

Démonstration. Désignons respectivement par α et α' les supports des demi-plans répondant à β et à β' (fig. 4); soient respectivement O et O′ les origines des semi-droites répondant à b et à b'. α et α' coupent (Q) et (Q′) respectivement suivant des ellipses (C) et (C′). Les semi-droites répondant à b et à b' coupent (C) et (C′) respectivement en N et N′. Soient M et M′ les seconds points d'intersection de NO et de N′O′ avec (C) et (C′) respectivement Soient P et P′ les pôles à distance finie ou infinie de MN et de M′N′ par rapport à (C) et (C′) respectivement. Soient A et A′ les pôles à distance finie ou infinie de α et de α' par rapport à (Q) et (Q′) respectivement. AO coupe (Q) en un point E situé du côté Σ de α et en un autre point D; A′O′ coupe (Q′) en un point E′ situé du côté Σ' de α' et en un deuxième point D′. Soit L un point fixe de (C) non situé sur les droites PO ou NM.

Considérons la transformation projective du système plan α dans le système plan α' qui transforme (C) en (C′), b en b' et β en β' (§ 275). Cette transformation porte P en P′, O en O′, N en N′, M en M′ et L en un point L′ situé sur (C′) mais non sur P′O′ ou N′M′.

Montrons maintenant qu'il existe une transformation de l'espace satisfaisant à la question.

Parmi les cinq points P, N, L, A et E quatre quelconques ne sont pas dans un même plan; les cinq points

P', N', L', A' et E' jouissent de la même propriété. Considérons la transformation projective de l'espace qui transforme les cinq premiers respectivement dans les cinq derniers (§ 271).

L'homologue de O est dans α' et sur $A'E'$; c'est donc O'. Il résulte de la façon dont L' a été défini que l'on a

$$P(N, O, M, L) \barwedge P'(N', O', M', L') \quad (\S\ 258).$$

L'homologue de la droite PM dans la transformation projective de l'espace considérée passe par P' et est située dans α', et si X' est un point de cet homologue, on a

$$P(N, O, M, L) \barwedge P'(N', O', X', L') \quad (\S\ 267).$$

Par conséquent l'homologue de PM est la droite $P'M'$ (§ 249); M' est donc l'homologue de M.

Or, parmi les quatre points P, N, L et M trois quelconques ne sont pas en ligne droite; les quatre points P', N', L' et M' jouissent de la même propriété. La transformation projective de l'espace considérée transforme les quatre premiers respectivement dans les quatre derniers, et il en est de même de la transformation projective du système plan α dans le système plan α' qui transforme (C) en (C'), b en b' et β en β'. Par conséquent, la transformation projective de l'espace considérée transforme (C) en (C'), b en b' et β en β' (§§ 266 et 260).

Or, le plan polaire par rapport à une quadrique d'un point non situé sur cette quadrique est le lieu des conjugués harmoniques du point par rapport aux points d'intersection avec la quadrique d'une sécante mobile passant par le point. On a donc $(AODE) = -1$, $(A'O'D'E') = -1$, $(AODE) = (A'O'D'E')$. D' est donc l'homologue de D dans la transformation projective de l'espace considérée.

Menons un plan quelconque par la droite AE. Ce plan coupe α suivant une droite passant par O. Cette droite coupe (C) en un point H situé du côté β de NM et en un point G situé du côté opposé de NM. Le plan AGH coupe (Q) suivant une ellipse (C_1). L'homologue H' de H est situé sur (C') du côté β' de $N'M'$ et l'homologue G'

de G est le 2e point d'intersection de H'O' et de (C'). Les points A', E', H' et G' sont donc dans un même plan; ce plan coupe (Q') suivant une ellipse (C'_1). Nous savons par la géométrie analytique que (C_1) est tangent en G à AG et en H à AH; de même (C'_1) est tangent en G' à A'G' et en H' à A'H'. (C'_1) passe par D' et E'.

Cela étant, on voit aisément en raisonnant comme au § 275 que (C_1) sera transformé en (C'_1). Comme (C_1) est l'intersection avec (Q) d'un plan quelconque mené par AE, (Q) sera transformé en (Q').

Enfin, il résulte du § 276 que Σ sera transformé en Σ'.

La transformation projective de l'espace considérée satisfait donc à la question.

On voit aisément que toute transformation satisfaisant à la question transforme (C) en (C'), N en N', O en O', M en M', P en P', L en L', A en A' et E en E'. Il n'y a donc qu'une transformation satisfaisant à la question.

C. q. f. d.

278. Maintenant nous sommes enfin en mesure d'aborder la question qui constitue l'objet proprement dit de ce chapitre.

Considérons dans l'espace euclidien un ellipsoïde fixe (S). Appelons *point hyperbolique* tout point intérieur à (S), non situé sur (S). Appelons *droite hyperbolique* l'ensemble des points hyperboliques appartenant à une droite coupant (S) en deux points distincts. Appelons *plan hyperbolique* l'ensemble des points hyperboliques appartenant à un plan coupant (S), non tangent à (S). Nous dirons qu'un point hyperbolique B est *situé entre* deux points hyperboliques A et C si le point B est situé entre A et C dans le sens euclidien ordinaire. Appelons *segment hyperbolique* tout segment déterminé par deux points hyperboliques. *semi-droite hyperbolique* l'ensemble des points hyperboliques d'une semi-droite dont l'origine est un point hyperbolique, et *angle hyperbolique* l'ensemble de deux semi-droites hyperboliques ayant même origine et appartenant à des droites différentes. Appelons *transformation congruente hyperboliquement* toute transforma-

tion projective de l'espace qui transforme l'ellipsoïde (S) en lui-même et dans laquelle il existe un couple de points homologues intérieurs à (S). Nous dirons que deux segments hyperboliques sont *congruents hyperboliquement* s'il existe une transformation congruente hyperboliquement qui transforme les extrémités de l'un dans les extrémités de l'autre. Nous dirons que deux angles hyperboliques sont *congruents hyperboliquement* s'il existe une transformation congruente hyperboliquement transformant les côtés de l'un dans les côtés de l'autre.

Remarquons que les théorèmes des §§ 276 et 277 restent vrais lorsque (Q) et (Q') sont des ellipsoïdes coïncidents, puisque nulle part dans les démonstrations de ces théorèmes nous n'avons dû supposer que (Q) et (Q') étaient distincts. Nous pouvons donc nous servir de ces théorèmes pour l'étude des transformations congruentes hyperboliquement.

Il résulte directement du § 276 que les transformations congruentes hyperboliquement transforment tout point hyperbolique en un point hyperbolique, tout segment hyperbolique en un segment hyperbolique et toute semi-droite hyperbolique en une nouvelle semi-droite hyperbolique dont l'origine est l'homologue de l'origine de la première semi-droite.

279. Théorème. *Le système de postulats constitué par les postulats de la géométrie générale auxquels on joint le postulat III 1 de la géométrie euclidienne et la négation du postulat des parallèles est exempt de contradictions.*

Démonstration. Au § 278 nous avons fait correspondre conventionnellement aux différents concepts fondamentaux de la géométrie générale certaines classes particulières d'objets existant dans l'espace euclidien. Nous avons désigné ces objets par les mots indiquant les concepts fondamentaux correspondants suivis du mot « hyperbolique » ou « hyperboliquement ». Nous appellerons ces objets « objets hyperboliques ». Nous allons démontrer que ces objets hyperboliques satisfont aux postulats de la géométrie générale et au postulat III 1 de la géométrie euclidienne, mais que le postulat des parallèles est faux pour ces objets.

Cette thèse est une simple proposition de géométrie euclidienne et pour l'établir nous pourrons nous servir de toutes les connaissances de géométrie euclidienne dont nous disposons.

On constate immédiatement que les objets hyperboliques satisfont aux postulats de l'appartenance et de l'ordre du § 10.

Passons au premier postulat de la congruence du § 3 Soient (AB) un segment hyperbolique et a' une semi-droite hyperbolique issue de A'. Nous pouvons trouver des trans formations congruentes hyperboliquement qui transforment A en A' et la semi-droite hyperbolique | AB en a' (§ 277); soit B' le point de a' répondant à B dans l'une de ces transformations. Montrons que B aura B' pour homologue dans toutes ces transformations. AB coupe (S) en A_1 et en B_1, B étant entre A et B_1, A entre B et A_1, et $A'B'$ coupe (S) en A'_1 et B'_1, B'_1 étant du côté de A' répondant à a' et A'_1 étant du côté opposé. Toute transformation congruente hyperboliquement qui porte A en A' et la semi-droite hyperbolique | AB en a' transforme B_1 en B'_1 et A_1 en A'_1 (§ 276). Si X' est l'homologue de B dans l'une quelconque de ces transformations, on a $(ABA_1B_1) = (A'X'A'_1B'_1) = (A'B'A'_1B'_1)$; l'homologue de B est donc B' dans toutes les transformations considérées (§ 241).

Pour montrer qu'un segment hyperbolique est congruent hyperboliquement à lui-même, il suffit de remarquer que la transformation de l'espace dans laquelle chaque point est transformé en lui-même est une transformation congruente hyperboliquement.

Le postulat III 1 du § 3 est donc complètement établi.

Le postulat III 2 du § 10 résulte des §§ 262 et 264.

Passons au postulat III 3 du § 10. Employons les mêmes notations que dans l'énoncé de ce postulat. Considérons une transformation congruente hyperboliquement qui transforme A en A' et la semi-droite hyperbolique | AC dans la semi-droite hyperbolique | $A'C'$. B sera transformé en B', d'après le postulat III 1 du § 3 que nous avons

établi. C sera transformé en un point C'' situé du même côté de B' que C' et tel que les segments hyperboliques (BC) et (B'C'') soient congruents hyperboliquement. C'' coïncide donc avec C', d'après le postulat III 1 du § 3, et par conséquent les segments hyperboliques (AC) et (A'C') sont congruents hyperboliquement.

Passons au postulat III 4 du § 10. Soient α et α' deux plans hyperboliques, b et b' deux semi-droites hyperboliques situées respectivement dans α et dans α', β l'une des deux moitiés en lesquelles le support de b partage α et β' l'une des deux moitiés en lesquelles le support de b' partage α'. Soit c une semi droite hyperbolique ayant même origine que b et située dans β. Soient (C) et (C') les intersections respectives des plans euclidiens auxquels appartiennent α et α' avec (S). Il y a une transformation congruente hyperboliquement qui transforme b en b' et β en β'. Cette transformation transforme c en une semi-droite hyperbolique c' ayant même origine que b' et située dans β'. Les angles hyperboliques (b, c) et (b', c') sont congruents hyperboliquement.

Toutes les transformations congruentes hyperboliquement qui transforment b en b' et β en β' transforment projectivement le système plan α_1 constitué par le plan euclidien auquel appartient α dans le système plan α'_1 constitué par le plan euclidien auquel appartient α'. Toutes les transformations projectives de α_1 en α'_1 ainsi obtenues transforment (C) en (C'), b en b' et β en β' ; elles sont donc identiques (§ 275) et c' est la seule semi-droite hyperbolique ayant même origine que b' et située dans β' telle que les angles hyperboliques (b, c) et (b', c') soient congruents hyperboliquement.

On montre que tout angle hyperbolique est congruent hyperboliquement à lui-même de la même façon qu'on a montré que tout segment hyperbolique est congruent hyperboliquement à lui-même.

Le postulat III 4 du § 10 est donc complètement établi.

Le postulat III 5 du § 10 résulte des §§ 262 et 264.

Passons au postulat III 6. Employons les mêmes nota-

tions que celles employées dans l'énoncé de ce postulat au § 10. Il y a une transformation congruente hyperboliquement qui transforme la semi-droite hyperbolique | AC en | A′C′, et le demi-plan hyperbolique limité à AC et contenant B dans celui limité à A′C′ et contenant B′. Cette transformation porte A en A′, C en C′, | AB en | A′B′, B en B′. On a donc bien les congruences hyperboliques répondant à celles dont l'existence est affirmée dans le postulat.

Le postulat des parallèles est faux, puisque d'un point hyperbolique A extérieur à une droite hyperbolique *a* on peut toujours mener dans le plan A*a* une infinité de droites hyperboliques n'ayant avec *a* aucun point hyperbolique commun.

On constate immédiatement que le postulat IV du § 10 est vrai.

Par conséquent les objets hyperboliques satisfont aux postulats de la géométrie générale et au postulat III 1 de la géométrie euclidienne, et le postulat des parallèles est faux pour ces objets.

Or, les objets hyperboliques existent dans l'espace euclidien, et la géométrie euclidienne est exempte de contradictions (§ 4). Notre théorème est donc démontré.

280. Nous avons trouvé dans le paragraphe précédent la réponse à la question soulevée au § 8, à savoir si l'on peut démontrer le postulat des parallèles au moyen des autres postulats euclidiens. La réponse à cette question est négative. En d'autres mots, la géométrie basée sur les postulats euclidiens autres que le postulat des parallèles auxquels on joint la négation du postulat des parallèles est exempte de contradictions, quelque loin que l'on pousse les déductions. Cette géométrie est la géométrie hyperbolique.

281. Théorème. *L'hypothèse de l'angle aigu est compatible avec les postulats de la géométrie générale.*

Démonstration. Considérons la géométrie basée sur les postulats de la géométrie générale, le postulat III 1 de la géométrie euclidienne et la négation du postulat des

parallèles. Cette géométrie est exempte de contradictions (§ 279). Dans cette géométrie, la somme des mesures des angles d'un triangle est inférieure ou égale à π (§ 212). Supposons qu'il existe un seul triangle où la somme des mesures des angles est égale à π. Cette somme est alors égale à π dans tout triangle (§ 205). Par conséquent, le postulat des parallèles est vrai (§ 214). Nous arrivons donc à une contradiction. Par conséquent, la somme des mesures des angles d'un triangle est toujours inférieure à π et l'hypothèse de l'angle aigu est vraie dans la géométrie considérée

Notre théorème est donc établi.

CHAPITRE X.

Notions de géométrie à n dimensions.

282. On peut établir que l'hypothèse de l'angle obtus est compatible avec les postulats de la géométrie générale par une méthode qui ressemble à celle du chapitre IX. Mais au lieu de considérer, comme au chapitre IX, les transformations projectives qui laissent un ellipsoïde réel invariant, on étudie, lorsqu'il s'agit de l'hypothèse de l'angle obtus, les transformations projectives qui laissent invariant un ellipsoïde imaginaire.

Ici nous ne suivrons pas cette voie. Nous emploierons une autre méthode basée sur la géométrie euclidienne à quatre dimensions. Nous commencerons par exposer rapidement les premières notions de la géométrie euclidienne à un nombre quelconque de dimensions. Nous nous sommes inspirés ici des leçons consacrées à la géométrie à n dimensions par M. C. Wasteels dans son cours de mécanique célèste à l'Université de Gand.

283. Nous regarderons ici la géométrie à plus de trois dimensions uniquement comme un langage conventionnel permettant d'exprimer d'une manière rapide et élégante des faits purement analytiques.

Lorsque dans une question d'analyse on a à considérer trois variables x, y et z, il est souvent avantageux de considérer le point de l'espace euclidien dont ces trois variables sont les coordonnées cartésiennes, c. à d. d'interpréter géométriquement les faits analytiques dont il s'agit. Lorsqu'on a à considérer n variables, n étant supérieur à trois, une telle interprétation géométrique devient impossible, du moins au moyen de la géométrie euclidienne telle que nous la connaissons, qui est édifiée sur les postulats du § **3** (voir § 5).

Toutefois, on peut souvent acquérir en partie les avantages qui résulteraient d'une telle interprétation en introduisant pour l'expression des faits analytiques un langage géométrique généralisé. C'est ce langage ainsi que les propriétés des nombres qu'il sert à exprimer que nous appellerons ici *géométrie euclidienne à n dimensions.* Cette géométrie est dite euclidienne parce qu'en l'édifiant on s'est inspiré des propriétés de l'espace euclidien. Il existe aussi une géométrie à n dimensions non-euclidienne, mais ici nous ne nous en occuperons pas.

Nous passons maintenant à l'exposé des premières notions de la géométrie à n dimensions.

284 Définitions. Considérons n variables réelles x_1, $x_2, \ldots, x_n$; on appelle *espace à n dimensions* l'ensemble de tous les systèmes de valeurs de ces n variables. On appelle *point* de l'espace à n dimensions tout système de valeurs des n variables. Les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui constituent un point sont les *coordonnées* de ce point.

285. Définitions. Supposons données p relations entre les coordonnées d'un point de l'espace à n dimensions, p étant inférieur à n et les p relations pouvant être résolues par rapport à p coordonnées convenablement choisies; soient

$$(1) \qquad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

ces relations. L'ensemble des points dont les coordonnées satisfont aux relations (1) est appelé une *variété à $n - p$ dimensions.*

Si l'on attribue à l'avance des valeurs arbitraires à $n - p$ coordonnées d'un point de la variété représentée par les relations (1), ces relations constituent un système de p équations à p inconnues permettant de déterminer les valeurs des p autres coordonnées. On peut donc exprimer p coordonnées d'un point d'une variété à $n - p$ dimensions en fonction des $n - p$ autres coordonnées

considérées comme variables indépendantes. Plus généralement, on peut exprimer les n coordonnées d'un point d'une variété à $n - p$ dimensions en fonction de $n - p$ paramètres arbitraires.

On appelle *ligne* toute variété à une dimension.

On appelle *surface* toute variété à deux dimensions.

On appelle *hypersurface* toute variété à $n - 1$ dimensions.

286. Définitions. Lorsque les équations qui représentent une variété sont toutes linéaires, cette variété est dite elle-même *linéaire*.

On appelle *droite* toute variété linéaire à une dimension.

On appelle *plan* toute variété linéaire à deux dimensions.

On appelle *hyperplan* toute variété linéaire à $n - 1$ dimensions.

D'après ces définitions, un hyperplan est l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient une équation de la forme

$$(1) \qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n + a_{n+1} = 0,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ n'étant pas simultanément nuls.

Un plan est l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient un système d'équations de la forme

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + \cdots + a'_n x_n + a'_{n+1} = 0, \\ a''_1 x_1 + a''_2 x_2 + \cdots + a''_n x_n + a''_{n+1} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^{(n-2)} x_1 + a_2^{(n-2)} x_2 + \cdots + a_n^{(n-2)} x_n + a_{n+1}^{(n-2)} = 0, \end{array} \right.$$

la matrice de déterminants

$$\left\| \begin{array}{cccc} a'_1 & a'_2 & \ldots & a'_n \\ a''_1 & a''_2 & \ldots & a''_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{(n-2)} & a_2^{(n-2)} & \ldots & a_n^{(n-2)} \end{array} \right\|$$

étant différente de zéro.

Une droite est l'ensemble des points dont les coor-

données vérifient un système d'équations de la forme

$$(3)\quad \begin{cases} a'_1x_1 + a'_2x_2 + \cdots + a'_nx_n + a'_{n+1} = 0, \\ a''_1x_1 + a''_2x_2 + \cdots + a''_nx_n + a''_{n+1} = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_1^{(n-1)}x_1 + a_2^{(n-1)}x_2 + \cdots + a_n^{(n-1)}x_n + a_{n+1}^{(n-1)} = 0, \end{cases}$$

la matrice de déterminants

$$\begin{Vmatrix} a'_1 & a'_2 & \ldots & a'_n \\ a''_1 & a''_2 & \ldots & a''_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{(n-1)} & a_2^{(n-1)} & \ldots & a_n^{(n-1)} \end{Vmatrix}$$

étant différente de zéro.

287. Définitions. On appelle *origine des coordonnées* le point à coordonnées toutes nulles. On appelle *axes coordonnés* les n droites dont les équations sont respectivement

$$\begin{array}{l} x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0, \\ x_1 = x_3 = x_4 = \cdots = x_n = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0. \end{array}$$

288 Théorème. *Par deux points distincts passe une droite et une seule.*

Démonstration. Soient A $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ et B $(x''_1, x''_2, \ldots, x''_n)$ deux points distincts. Considérons le système des $n-1$ équations

$$(1)\qquad \frac{x_1 - x''_1}{x'_1 - x''_1} = \frac{x_2 - x''_2}{x'_2 - x''_2} = \cdots = \frac{x_n - x''_n}{x'_n - x''_n};$$

quand il arrive que deux coordonnées de même nom x'_ν et x''_ν de A et de B sont égales, nous supposons dans (1) l'équation répondant au rapport $\dfrac{x_\nu - x''_\nu}{x'_\nu - x''_\nu}$ remplacée par l'équation $x_\nu = x''_\nu$.

Moyennant cette convention, on vérifie aisément que les équations (1), § 288 représentent une droite passant par A et par B.

Supposons maintenant que les équations (3), § 286,

représentent une droite passant par A et par B, et soit M $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un point quelconque de cette droite distinct de B. On a

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} a'_1(x_1 - x''_1) \quad + \cdots + a'_n(x_n - x''_n) \quad = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_1^{(n-1)}(x_1 - x''_1) + \cdots + a_n^{(n-1)}(x_n - x''_n) = 0, \end{array}\right.$$

et

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} a'_1(x'_1 - x''_1) \quad + \cdots + a'_n(x'_n - x''_n) \quad = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_1^{(n-1)}(x'_1 - x''_1) + \cdots + a_n^{(n-1)}(x'_n - x''_n) = 0. \end{array}\right.$$

Puisque la matrice de déterminants formée avec les coefficients des x dans les équations (3) du 286 est différente de zéro, on déduit des équations (2) et (3) du § 288 qu'on a

$$x_1 - x''_1 = \rho \begin{vmatrix} a'_2 & \dots & a'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2^{(n-1)} & \dots & a_n^{(n-1)} \end{vmatrix}, \dots, x_n - x''_n = (-1)^{n-1}\rho \begin{vmatrix} a'_1 & \dots & a'_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{(n-1)} & \dots & a_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$x'_1 - x''_1 = \rho' \begin{vmatrix} a'_2 & \dots & a'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2^{(n-1)} & \dots & a_n^{(n-1)} \end{vmatrix}, \dots, x'_n - x''_n = (-1)^{n-1}\rho' \begin{vmatrix} a'_1 & \dots & a'_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{(n-1)} & \dots & a_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

ρ et ρ' étant deux nombres non nuls.

De là il résulte que les coordonnées de M vérifient les équations (1), § 288.

Réciproquement, si les coordonnées d'un point M $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vérifient les équations (1), § 288, elles vérifient les équations (3), § 286.

Par conséquent, les droites représentées respectivement par les équations (1), § 288 et par les équations (3), § 286 sont identiques

Le théorème est donc établi.

289. Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour que trois points* A $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, B $(x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$ *et* M $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *soient en ligne droite est*

$$\begin{Vmatrix} x_1 - x''_1 & x_2 - x''_2 & \dots & x_n - x''_n \\ x'_1 - x''_1 & x'_2 - x''_2 & \dots & x'_n - x''_n \end{Vmatrix} = 0.$$

Démonstration. Ce théorème se déduit sans la moindre difficulté du § 288.

290. Théorème. *Par trois points distincts non situés en ligne droite passe un plan et un seul.*

Démonstration. Soient $A(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$, $B(x''_1, x''_2, ..., x''_n)$ et $C(x'''_1, x'''_2, ..., x'''_n)$ trois points distincts non situés en ligne droite. On a (§ 289)

$$(1) \qquad \left\| \begin{matrix} x'_1 - x'''_1 & x'_2 - x'''_2 & \dots & x'_n - x'''_n \\ x''_1 - x'''_1 & x''_2 - x'''_2 & \dots & x''_n - x'''_n \end{matrix} \right\| \neq 0.$$

Cela signifie que l'un au moins des déterminants obtenus en choisissant dans ce tableau deux colonnes diffère de zéro ; supposons par exemple

$$(2) \qquad \left| \begin{matrix} x'_1 - x'''_1 & x'_2 - x'''_2 \\ x''_1 - x'''_1 & x''_2 - x'''_2 \end{matrix} \right| \neq 0.$$

Considérons le système des $n-2$ équations suivantes

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{matrix} x_1 - x'''_1 & x'_1 - x'''_1 & x''_1 - x'''_1 \\ x_2 - x'''_2 & x'_2 - x'''_2 & x''_2 - x'''_2 \\ x_3 - x'''_3 & x'_3 - x'''_3 & x''_3 - x'''_3 \end{matrix} \right| = 0, \\ \left| \begin{matrix} x_1 - x'''_1 & x'_1 - x'''_1 & x''_1 - x'''_1 \\ x_2 - x'''_2 & x'_2 - x'''_2 & x''_2 - x'''_2 \\ x_4 - x'''_4 & x'_4 - x'''_4 & x''_4 - x'''_4 \end{matrix} \right| = 0, \; ..., \\ \left| \begin{matrix} x_1 - x'''_1 & x'_1 - x'''_1 & x''_1 - x'''_1 \\ x_2 - x'''_2 & x'_2 - x'''_2 & x''_2 - x'''_2 \\ x_n - x'''_n & x'_n - x'''_n & x''_n - x'''_n \end{matrix} \right| = 0. \end{array} \right.$$

Ces équations sont linéaires par rapport aux coordonnées courantes $x_1, x_2, ..., x_n$; elles sont vérifiées si l'on remplace les coordonnées courantes par celles de A, de B ou de C. Considérons la matrice de déterminants formée avec les coefficients des coordonnées courantes. Supprimons dans cette matrice les colonnes répondant à x_1 et à x_2. Dans le déterminant obtenu, tous les éléments sont nuls sauf ceux qui forment le terme principal ; ces derniers sont tous identiques à $\left| \begin{matrix} x'_1 - x'''_1 & x''_1 - x'''_1 \\ x'_2 - x'''_2 & x''_2 - x'''_2 \end{matrix} \right|$, qui est différent de zéro d'après (2), § 290. Le déterminant obtenu

est donc différent de zéro et la matrice de déterminants en question est différente de zéro. Les équations (3), § 290 représentent donc un plan qui passe par A, B et C.

Soient maintenant

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} a'_1x_1 + \cdots + a'_nx_n + a'_{n+1} = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_1^{(n-2)}x_1 + \cdots + a_n^{(n-2)}x_n + a_{n+1}^{(n-2)} = 0 \end{array}\right.$$

et

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} b'_1x_1 + \cdots + b'_nx_n + b'_{n+1} = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_1^{(n-2)}x_1 + \cdots + b_n^{(n-2)}x_n + b_{n+1}^{(n-2)} = 0 \end{array}\right.$$

deux plans passant par A, B et C. On a (§ 286)

$$(6)\quad \left\| \begin{array}{ccc} a'_1 & \ldots & a'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{(n-2)} & \ldots & a_n^{(n-2)} \end{array} \right\| \neq 0,$$

En exprimant que les coordonnées de A, B et C vérifient (4) et la première équation (5), on trouve

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} a'_1(x'_1 - x'''_1) + \cdots + a'_n(x'_n - x'''_n) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_1^{(n-2)}(x'_1 - x'''_1) + \cdots + a_n^{(n-2)}(x'_n - x'''_n) = 0, \\ b'_1(x'_1 - x'''_1) + \cdots + b'_n(x'_n - x'''_n) = 0 \end{array}\right.$$

et

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} a'_1(x''_1 - x'''_1) + \cdots + a'_n(x''_n - x'''_n) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_1^{(n-2)}(x''_1 - x'''_1) + \cdots + a_n^{(n-2)}(x''_n - x'''_n) = 0, \\ b'_1(x''_1 - x'''_1) + \cdots + b'_n(x''_n - x'''_n) = 0. \end{array}\right.$$

On a

$$(9)\quad \left\| \begin{array}{ccc} a'_1 & \ldots & a'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{(n-2)} & \ldots & a_n^{(n-2)} \\ b'_1 & \ldots & b'_n \end{array} \right\| = 0,$$

car, sinon, on trouverait, en résolvant (7) et (8) respectivement par rapport aux $x' - x'''$ et aux $x'' - x'''$, que les $x'' - x'''$ sont proportionnels aux $x' - x'''$, ce qui n'est

pas, d'après (1). On a ensuite

$$(10)\qquad \left\| \begin{matrix} a'_1 & \dots & a'_n & a'_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{(n-2)} & \dots & a_n^{(n-2)} & a_{n+1}^{(n-2)} \\ b'_1 & \dots & b'_n & b'_{n+1} \end{matrix} \right\| = 0;$$

si, en effet, cette matrice était différente de zéro, on pourrait conclure de ce fait et de (9) que les équations (4) et la première équation (5) sont incompatibles, en vertu des théorèmes sur les équations linéaires que nous supposons connus ici; or, ces équations ne sont pas incompatibles, puisqu'elles sont vérifiées par les coordonnées de A, B et C. D'après les théorèmes sur les équations linéaires supposés connus ici, on peut ensuite conclure de (6), (9) et (10) que tout système de valeurs de $x_1, x_2, \dots, x_n$ vérifiant (4) vérifie la première équation (5).

Par des raisonnements identiques à ceux que nous venons de faire sur la première équation (5), on montre que chacune des autres équations (5) est une conséquence de (4). Tout système de valeurs des x vérifiant (4) vérifie donc (5). On établit exactement de la même manière que tout système de valeurs vérifiant (5) vérifie (4). Les plans (4) et (5) ne peuvent donc être distincts. Il ne passe donc qu'un plan par A, B et C.

C. q. f. d.

291. Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour que quatre points* A $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, B $(x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$, C $(x'''_1, x'''_2, \dots, x'''_n)$ *et* M $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *soient situés dans un même plan est*

$$(1)\qquad \left\| \begin{matrix} x_1 - x'''_1 & x_2 - x'''_2 & \dots & x_n - x'''_n \\ x'_1 - x'''_1 & x'_2 - x'''_2 & \dots & x'_n - x'''_n \\ x''_1 - x'''_1 & x''_2 - x'''_2 & \dots & x''_n - x'''_n \end{matrix} \right\| = 0.$$

Démonstration. On déduit aisément ce théorème du § 290 en remarquant que (1), § 291, est une conséquence de (2) et (3), § 290.

292. On peut étendre les théorèmes et les démonstrations des §§ 288 et 290 aux variétés linéaires à un nombre

quelconque de dimensions. Comme nous n'aurons pas besoin ici de cette extension, nous ne nous y arrêterons pas et nous nous contenterons du théorème suivant.

Théorème. *Dans l'espace à quatre dimensions, il existe un hyperplan et un seul passant par quatre points donnés non situés dans un même plan.*

Démonstration. Soient $A(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$, $B(x''_1, \ldots, x''_4)$, $C(x'''_1, \ldots, x'''_4)$ et $D(x^{IV}_1, \ldots, x^{IV}_4)$ les quatre points donnés. On a (§ 291)

$$\left\| \begin{matrix} x'_1 - x^{IV}_1 & \ldots & x'_4 - x^{IV}_4 \\ x''_1 - x^{IV}_1 & \ldots & x''_4 - x^{IV}_4 \\ x'''_1 - x^{IV}_1 & \ldots & x'''_4 - x^{IV}_4 \end{matrix} \right\| \neq 0.$$

Supposons par exemple

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} x'_1 - x^{IV}_1 & x'_2 - x^{IV}_2 & x'_3 - x^{IV}_3 \\ x''_1 - x^{IV}_1 & x''_2 - x^{IV}_2 & x''_3 - x^{IV}_3 \\ x'''_1 - x^{IV}_1 & x'''_2 - x^{IV}_2 & x'''_3 - x^{IV}_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

L'équation

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} x_1 - x^{IV}_1 & \ldots & x_4 - x^{IV}_4 \\ x'_1 - x^{IV}_1 & \ldots & x'_4 - x^{IV}_4 \\ x''_1 - x^{IV}_1 & \ldots & x''_4 - x^{IV}_4 \\ x'''_1 - x^{IV}_1 & \ldots & x'''_4 - x^{IV}_4 \end{vmatrix} = 0,$$

où x_1, x_2, x_3 et x_4 sont les coordonnées courantes, représente un hyperplan passant par les points A, B, C et D.

Soit

$$(3) \qquad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5 = 0$$

un autre hyperplan passant par les points A, B, C et D.

Si $M(x_1, \ldots, x_4)$ est un point de (3), § 292, on a

$$(4) \qquad \begin{cases} a_1(x_1 - x^{IV}_1) + \cdots + a_4(x_4 - x^{IV}_4) = 0, \\ a_1(x'_1 - x^{IV}_1) + \cdots \qquad = 0, \\ a_1(x''_1 - x^{IV}_1) + \cdots \qquad = 0, \\ a_1(x'''_1 - x^{IV}_1) + \cdots \qquad = 0. \end{cases}$$

a_1, a_2, a_3 et a_4 n'étant pas simultanément nuls, les coordonnées de M vérifient (2), § 292.

Soit, d'autre part, $M(x_1, \ldots, x_4)$ un point de (2), § 292.

Les trois dernières relations (4), § 292, sont satisfaites. De (1) et (2), § 292, il résulte que la première relation (4), § 292, sera aussi satisfaite. On en déduit aisément que (3), § 292, sera satisfait.

Les équations (2) et (3) du § 292 sont donc équivalentes, ce qui démontre le théorème.

293. Théorème. *Si un hyperplan contient trois points d'un plan non situés en ligne droite, il contient tous les points de ce plan; si un hyperplan ou un plan contiennent deux points distincts d'une droite, ils contiennent tous les points de cette droite.*

Démonstration. Supposons que l'hyperplan

$$(1) \qquad a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 + \cdots + a'_nx_n + a'_{n+1} = 0$$

contient les trois points A $(x'_1, .., x'_n)$, B $(x''_1, ..., x''_n)$ et C $(x'''_1, ..., x'''_n)$, non situés en ligne droite. Je dis que l'hyperplan contient tous les points du plan ABC; en effet.

On a (§ 289)

$$\left\| \begin{matrix} x'_1 - x'''_1 & x'_2 - x'''_2 & \ldots & x'_n - x'''_n \\ x''_1 - x'''_1 & x''_2 - x'''_2 & \ldots & x''_n - x'''_n \end{matrix} \right\| \neq 0.$$

Supposons par exemple

$$\begin{vmatrix} x'_1 - x'''_1 & x'_2 - x'''_2 \\ x''_1 - x'''_1 & x''_2 - x'''_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Alors on a

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & 1 \\ x''_1 & x''_2 & 1 \\ x'''_1 & x'''_2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

On n'a pas $a'_3 = a'_4 = \cdots = a'_n = 0$; sinon, en exprimant que (1), § 293, est vérifié par les coordonnées de A, de B et de C, et en considérant dans les trois équations obtenues a'_1, a'_2 et a'_{n+1} comme inconnues, on trouverait que le déterminant qui figure dans (2), § 293, doit être nul.

Cela étant, on peut trouver des nombres $a''_3, .., a''_n$; $a'''_3, ..., a'''_n$; ...; $a_3^{(n-2)}, ..., a_n^{(n-2)}$ tels que

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} a'_3 & a'_4 & \ldots & a'_n \\ a''_3 & \ldots & \ldots & a''_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_3^{(n-2)} & \ldots & \ldots & a_n^{(n-2)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

D'après (2), § 293, on peut à coup sûr trouver trois nombres a''_1, a''_2 et a''_{n+1} tels que

$$\begin{aligned} a''_1x'_1 + a''_2x'_2 + a''_3x'_3 + \cdots + a''_nx'_n + a''_{n+1} &= 0, \\ a''_1x''_1 + a''_2x''_2 + a''_3x''_3 + \cdots + a''_nx''_n + a''_{n+1} &= 0, \\ a''_1x'''_1 + a''_2x'''_2 + a''_3x'''_3 + \cdots + a''_nx'''_n + a''_{n+1} &= 0. \end{aligned}$$

On voit de même que l'on peut trouver des nombres $a'''_1, a'''_2, a'''_{n+1}$; $a_1^{\text{IV}}, a_2^{\text{IV}}, a_{n+1}^{\text{IV}}$; ...; $a_1^{(n-2)}$, $a_2^{(n-2)}$, $a_{n+1}^{(n-2)}$ tels que les équations

$$\begin{aligned} a'''_1x_1 + \cdots + a'''_nx_n + a'''_{n+1} &= 0, \\ a_1^{\text{IV}}x_1 + \cdots + a^{\text{IV}}_nx_n + a^{\text{IV}}_{n+1} &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_1^{(n-2)}x_1 + \cdots + a_n^{(n-2)}x_n + a_{n+1}^{(n-2)} &= 0 \end{aligned}$$

soient vérifiées par les coordonnées de A, de B et de C.

Considérons le système d'équations

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} a'_1x_1 + \cdots + a'_nx_n + a'_{n+1} &= 0, \\ a''_1x_1 + \cdots + a''_nx_n + a''_{n+1} &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_1^{(n-2)}x_1 + \cdots + a_n^{(n-2)}x_n + a_{n+1}^{(n-2)} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Ces équations représentent un plan, d'après (3), § 293. Elles sont vérifiées par les coordonnées de A, de B et de C; elles représentent donc le plan unique qui passe par A, B et C (§ 290) La première de ces équations est précisément (1), § 293. Il en résulte que tout point de (4), § 293, est situé dans l'hyperplan (1), § 293. C. q. f. d.

On démontre exactement de la même manière que si un hyperplan contient deux points distincts d'un droite, il contient tous les points de cette droite.

Considérons enfin un plan

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} a'_1x_1 + \cdots + a'_nx_n + a'_{n+1} &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_1^{(n-2)}x_1 + \cdots + a_n^{(n-2)}x_n + a_{n+1}^{(n-2)} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Supposons que ce plan passe par les points distincts A et B Chacune des équations (5), § 293, isolée représente un hyperplan. Les coordonnées de A et de B vérifient chacune de ces équations A et B sont donc situés dans

chacun des hyperplans représentés par les différentes équations (5). D'après ce qui précède, tout point de la droite AB sera donc situé dans chacun de ces hyperplans. Les coordonnées de tout point de AB vérifient donc chacune des équations (5). Tout point de AB sera donc situé dans le plan représenté par les équations (5) prises ensemble. C. q. f. d.

294. Définition. Etant donnés deux points A $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et B $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, on appelle *distance* des points A et B et on désigne par AB le nombre

$$+\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2}.$$

295. Définition. Supposons donnés deux points distincts P $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ et A $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. D'après le § 288, nous pouvons exprimer les coordonnées d'un point quelconque X $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de la droite PA en fonction d'un paramètre arbitraire ρ de la manière suivante :

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_1=p_1+\rho(a_1-p_1), \\ x_2=p_2+\rho(a_2-p_2), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n=p_n+\rho(a_n-p_n). \end{array}\right.$$

Considérons l'ensemble des points de PA pour lesquels $\rho \geqslant 0$ et l'ensemble de ceux pour lesquels $\rho < 0$. Ces ensembles, qui ont P en commun, constituent par définition les deux *semi-droites* en lesquelles P partage PA. Ces semi-droites, abstraction faite de l'ordre dans lequel elles correspondent respectivement à $\rho \geqslant 0$ et à $\rho < 0$, sont indépendantes du choix de A sur PA.

En faisant $\rho = 1$ dans (1), § 295, on trouve le point A. La semi-droite issue de P et comprenant le point A est donc celle qui répond aux valeurs positives de ρ. Nous désignerons cette semi-droite par |OA.

296. Définition. Supposons donnés trois points A $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, B $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ et P $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$; nous supposons A et B distincts de P. Posons

$$y=\frac{(a_1-p_1)(b_1-p_1)+(a_2-p_2)(b_2-p_2)+\cdots+(a_n-p_n)(b_n-p_n)}{+\sqrt{(a_1-p_1)^2+(a_2-p_2)^2+\cdots+(a_n-p_n)^2}\sqrt{(b_1-p_1)^2+(b_2-p_2)^2+\cdots+(b_n-p_n)^2}}.$$

y est un nombre fini parfaitement déterminé. y est de

la forme

$$y = \frac{r'_1 s'_1 + r'_2 s'_2 + \cdots + r'_n s'_n}{\sqrt{r'^2_1 + r'^2_2 + \cdots + r'^2_n}\sqrt{s'^2_1 + s'^2_2 + \cdots + s'^2_n}}.$$

Désignons les modules des r' et des s' par les mêmes lettres sans accent. Nous aurons

$$|y| \leqslant \frac{r_1 s_1 + r_2 s_2 + \cdots + r_n s_n}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2}\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_n^2}},$$

$$y^2 \leqslant \frac{(r_1 s_1 + r_2 s_2 + \cdots + r_n s_n)(r_1 s_1 + r_2 s_2 + \cdots + r_n s_n)}{(r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2)(s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_n^2)}.$$

Effectuons les multiplications indiquées au numérateur et au dénominateur. A un terme $r_i s_i \times r_i s_i$ au numérateur répond le terme $r_i^2 \times s_i^2$ au dénominateur, qui est égal à $r_i s_i \times r_i s_i$. Considérons les deux termes $r_i s_i \times r_j s_j$ et $r_j s_j \times r_i s_i$ au numérateur. Il y correspond deux termes $r_i^2 s_j^2$ et $r_j^2 s_i^2$ au dénominateur. On a

$$r_i s_i \times r_j s_j + r_j s_j \times r_i s_i = 2\,(r_i s_j)\,(r_j s_i) \leqslant (r_i s_j)^2 + (r_j s_i)^2$$
$$= r_i^2 s_j^2 + r_j^2 s_i^2.$$

De là il résulte qu'on a

$$y^2 \leqslant 1 \text{ et } |y| \leqslant 1.$$

Il existe un nombre θ et un seul, compris entre 0 et π, tel que $\cos\theta = y$.

On vérifie aisément que y ne change pas quand on remplace A par un autre point de |PA, distinct de P, ou B par un autre point de |PB, distinct de P.

θ ne dépend donc que des semi droites |PA et |PB ; θ est par définition *l'angle* de ces semi-droites. On désigne le nombre θ par $\measuredangle$ APB ou encore par (a, b), a désignant |PA et b désignant |PB.

297. Définitions. Supposons donnée une transformation de l'espace à n dimensions où l'on fait correspondre à chaque point M $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un nouveau point M' $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ par les formules

$$(1)\quad \begin{cases} x'_1 = l'_1 x_1 + l'_2 x_2 + \cdots + l'_n x_n + l'_{n+1}, \\ x'_2 = l''_1 x_1 + l''_2 x_2 + \cdots + l''_n x_n + l''_{n+1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x'_n = l^{(n)}_1 x_1 + l^{(n)}_2 x_2 + \cdots + l^{(n)}_n x_n + l^{(n)}_{n+1}. \end{cases}$$

Une telle transformation est dite *linéaire*.

Si l'on a

$$(2) \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=n}[l_1^{(\nu)}]^2 = \sum_{\nu=1}^{\nu=n}[l_2^{(\nu)}]^2 = \cdots = \sum_{\nu=1}^{\nu=n}[l_n^{(\nu)}]^2 = 1,$$

et

$$(3) \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=n}[l_i^{(\nu)} l_j^{(\nu)}] = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} i \text{ et } j \text{ étant deux nombres différents} \\ \text{choisis de toutes les manières pos-} \\ \text{sibles parmi les nombres } 1, 2, \ldots, n, \end{array} \right.$$

la transformation donnée est appelée une *transformation linéaire orthogonale*.

Multiplions le déterminant des coefficients des x dans les formules (1), § 297, par lui-même, en multipliant colonne par colonne. Si les égalités (2) et (3), § 297, ont lieu, le produit est un déterminant dont tous les éléments sont nuls, sauf ceux de la diagonale principale, qui sont tous égaux à l'unité. Le carré du déterminant des coefficients des x est donc égal à l'unité ; ce déterminant vaut donc un en valeur absolue et il est donc différent de zéro. Par conséquent, à chaque point de l'espace correspond un point transformé et un seul et réciproquement, à tout point répond un point et un seul dont il est le transformé.

298. Théorème. *Une transformation linéaire orthogonale laisse invariantes les distances mutuelles de tous les points de l'espace.*

Démonstration. Soient A $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et B $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ deux points quelconques, A′ $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ et B′ $(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n)$ leurs transformés. Dans l'expression pour A′B′ du § 294 on remplace les coordonnées de A′ et de B′ par leurs valeurs en fonction de celles de A et de B fournies par les formules (1), § 297. On constate immédiatement au moyen des égalités (2) et (3), § 297, que A′B′ = AB.

299. Théorème. *Toute transformation linéaire qui laisse invariantes les distances mutuelles de tous les points de l'espace est orthogonale.*

Démonstration. Considérons la transformation définie

par les formules

$$(1)\quad \begin{cases} x'_1 = l'_1 x_1 + l'_2 x_2 + \cdots + l'_n x_n + l'_{n+1}, \\ x'_2 = l''_1 x_1 + l''_2 x_2 + \cdots + l''_n x_n + l''_{n+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x'_n = l^{(n)}_1 x_1 + l^{(n)}_2 x_2 + \cdots + l^{(n)}_n x_n + l^{(n)}_{n+1}. \end{cases}$$

Soient A $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et B $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ deux points quelconques, A′ $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ et B′ $(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n)$ leurs transformés. Considérons la relation

$$(2)\qquad A'B' = AB,$$

où A′B′ et AB sont supposés remplacés par leurs expressions du § 294.

Remplaçons dans le premier membre de (2), § 299, les coordonnées de A′ et de B′ par leurs expressions en fonction de celles de A et de B fournies par les formules (1). Les deux membres de (2), § 299, sont alors deux polynômes homogènes et du second degré en $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Ces deux polynômes sont égaux pour toutes les valeurs des a et des b. Les coefficients de deux termes semblables pris respectivement dans les deux polynômes sont donc égaux. En exprimant cette égalité pour les différents couples de termes semblables à considérer, on trouve précisément les égalités (2) et (3) du § 297. C. q. f. d.

300. Théorème. *L'inverse d'une transformation linéaire orthogonale est une transformation linéaire orthogonale.*

Démonstration. Le déterminant des coefficients des x étant différent de zéro, on peut résoudre les relations (1), § 297, par rapport aux x. On trouve ainsi que les x sont des fonctions linéaires des x'. La transformation inverse est donc linéaire. Elle est orthogonale d'après les §§ 298 et 299.

301. Théorème. *Supposons données deux transformations linéaires orthogonales. Effectuons sur chaque point la première transformation et puis sur son transformé ainsi obtenu la seconde transformation. La transformation ainsi obtenue est une transformation linéaire orthogonale.*

Démonstration. On établit ce théorème sans la moindre difficulté en se basant sur le § 299.

302. Théorème. *Toute transformation linéaire orthogonale transforme des droites, des plans et des hyperplans en variétés de même espèce; elle transforme de plus des semi-droites en des semi-droites.*

Démonstration. Considérons un hyperplan

(1) $$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_{n+1} = 0.$$

Les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ du point dont un point quelconque $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ de cet hyperplan est le transformé satisfont à une équation de la forme

(2) $$\left\{\begin{array}{l} \quad [a_1l'_1 \quad + a_2l''_1 \quad + \cdots + a_nl^{(n)}_1]x_1 \\ + \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ + [a_1l'_n \quad + a_2l''_n \quad + \cdots + a_nl^{(n)}_n]x_n \\ + a_1l'_{n+1} + a_2l''_{n+1} + \cdots + a_nl^{(n)}_{n+1} + a_{n+1} = 0. \end{array}\right.$$

Le déterminant des $l_1, l_2, \ldots, l_n$ n'est pas nul. Si donc les coefficients des x dans la dernière équation étaient tous nuls, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ seraient nuls, ce qui est exclu. La dernière équation représente donc un hyperplan. On voit immédiatement que le transformé d'un point quelconque de l'hyperplan (2), § 302, est sur l'hyperplan (1), § 302.

Ensuite, on voit aisément que si les coordonnées de trois points ou de quatre points satisfont aux conditions du § 289 ou du § 291, les coordonnées des transformés de ces points satisfont aux mêmes conditions. Une droite et un plan sont donc respectivement transformés en une droite et un plan.

Supposons enfin les coordonnées d'un point quelconque X de la droite PA exprimées en fonction de celles de P et de A et d'un paramètre ρ par les formules (1), § 295; on constate immédiatement que si l'on remplace dans les relations (1), § 295, les coordonnées de P, A et X par celles de leurs transformés P', A' et X', sans changer la valeur de ρ, ces relations restent satisfaites. La semi-droite |PA est donc transformée dans la semi-droite |P'A', et la semi-droite opposée à |PA dans celle opposée à |P'A'.

Notre théorème est donc complètement établi.

303. THÉORÈME. *Une transformation linéaire orthogonale laisse invariant l'angle de tout couple de semi-droites issues d'un même point.*

DÉMONSTRATION. On démontre ce théorème sans aucune difficulté par vérification, en suivant la même méthode qu'au § 298.

304. THÉORÈME. *On peut toujours trouver une transformation linéaire orthogonale qui laisse l'origine des coordonnées invariante et transforme un hyperplan donné en un nouvel hyperplan donné, les deux hyperplans passant par l'origine.*

DÉMONSTRATION. Supposons donnés deux hyperplans passant par l'origine

$$(1) \qquad a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0,$$

$$(2) \qquad a'_1x_1 + a'_2x_2 + \cdots + a'_nx_n = 0.$$

Je dis qu'il y a une transformation linéaire orthogonale qui transforme l'hyperplan (1), § 304 dans l'hyperplan (2), § 304, et qui laisse l'origine des coordonnées invariante. En effet.

Prenons n nombres fixes $L'_1, L''_1, \ldots, L_1^{(n)}$ qui ne sont pas tous nuls et tels que l'on ait

$$(3) \qquad \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ L'_1 & L''_1 & \ldots & L_1^{(n)} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Supposons par exemple $L'_1 \neq 0$.

Soient $L''_2, L'''_2, \ldots, L_2^{(n)}$ $n-1$ nombres quelconques non nuls simultanément. L'_1 étant différent de zéro, on peut trouver un nombre L'_2 tel que

$$(4) \qquad L'_1L'_2 + L''_1L''_2 + \cdots + L_1^{(n)}L_2^{(n)} = 0.$$

Supposons que l'on ait

$$(5) \qquad \left\| \begin{matrix} L'_1 & L''_1 & \ldots & L_1^{(n)} \\ L'_2 & L''_2 & \ldots & L_2^{(n)} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Considérons les deux équations

$$(6) \qquad L'_1x_1 + L''_1x_2 + \cdots + L_1^{(n)}x_n = 0,$$

$$(7) \qquad L'_2x_1 + L''_2x_2 + \cdots + L_2^{(n)}x_n = 0,$$

où les x sont considérés comme inconnues. Comme on n'a pas $L'_1 = L''_1 = \cdots = L_1^{(n)} = 0$, (5), § 304, montre que (7), § 304, est une conséquence de (6), § 304. D'après (4), § 304, $L'_2, L''_2, \ldots, L_2^{(n)}$ vérifient (6), § 304 ; ils vérifient donc (7), § 304, et l'on a

$$L'^2_2 + L''^2_2 + \cdots + [L_2^{(n)}]^2 = 0,$$
$$L'_2 = L''_2 = \cdots = L_2^{(n)} = 0,$$

ce qui a été exclu. La supposition dont nous sommes partis est donc fausse et l'on a

(8) $$\begin{Vmatrix} L'_1 & L''_1 & \ldots & L_1^{(n)} \\ L'_2 & L''_2 & \ldots & L_2^{(n)} \end{Vmatrix} \neq 0.$$

Supposons par exemple

$$\begin{vmatrix} L'_1 & L''_1 \\ L'_2 & L''_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Soient $L'''_3, L_3^{\text{IV}}, \ldots, L_3^{(n)}$ $n-2$ nombres quelconques non nuls simultanément. Il y a deux nombres L'_3 et L''_3 tels que

(9) $$L'_1L'_3 + L''_1L''_3 + L'''_1L'''_3 + \cdots + L_1^{(n)}L_3^{(n)} = 0,$$

(10) $$L'_2L'_3 + L''_2L''_3 + L'''_2L'''_3 + \cdots + L_2^{(n)}L_3^{(n)} = 0.$$

Supposons que l'on ait

(11) $$\begin{Vmatrix} L'_1 & L''_1 & \ldots & L_1^{(n)} \\ L'_2 & L''_2 & \ldots & L_2^{(n)} \\ L'_3 & L''_3 & \ldots & L_3^{(n)} \end{Vmatrix} = 0.$$

Considérons les trois équations

(12) $$L'_1x_1 + L''_1x_2 + \cdots + L_1^{(n)}x_n = 0,$$

(13) $$L'_2x_1 + L''_2x_2 + \cdots + L_2^{(n)}x_n = 0,$$

(14) $$L'_3x_1 + L''_3x_2 + \cdots + L_3^{(n)}x_n = 0,$$

où les x sont considérés comme inconnues. D'après (8), § 304, on peut résoudre (12) et (13), § 304, par rapport à deux inconnues x_λ et x_μ convenablement choisies. Donnons aux inconnues autres que x_λ et x_μ des valeurs quelcon-

ques. Soient A, B et C les parties des premiers membres de (12), (13) et (14), § 304, indépendantes de x_λ et x_μ. D'après (11), § 304, on voit aisément que

$$\begin{vmatrix} L_1^{(\lambda)} & L_1^{(\mu)} & A \\ L_2^{(\lambda)} & L_2^{(\mu)} & B \\ L_3^{(\lambda)} & L_3^{(\mu)} & C \end{vmatrix} = 0.$$

De là il résulte que (14), § 304, est une conséquence de (12) et (13), § 304. Or, $L'_3, L''_3, \ldots, L_3^{(n)}$ vérifient (12) et (13), § 304. Ils vérifient donc aussi (14), § 304; on a donc

$$L'^2_3 + L''^2_3 + \cdots + [L_3^{(n)}]^2 = 0,$$
$$L'_3 = L''_3 = \cdots = L_3^{(n)} \quad = 0,$$

ce qui a été exclu. La supposition (11), § 304, est donc fausse et l'on a

$$\begin{Vmatrix} L'_1 & L''_1 & \ldots & L_1^{(n)} \\ L'_2 & L''_2 & \ldots & L_2^{(n)} \\ L'_3 & L''_3 & \ldots & L_3^{(n)} \end{Vmatrix} \neq 0.$$

Supposons par exemple

$$\begin{vmatrix} L'_1 & L''_1 & L'''_1 \\ L'_2 & L''_2 & L'''_2 \\ L'_3 & L''_3 & L'''_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Soient $L_4^{IV}, L_4^{V}, \ldots, L_4^{(n)}$ $n-3$ nombres quelconques non simultanément nuls. Il y a trois nombres L'_4, L''_4 et L'''_4 tels que

$$L'_1L'_4 + L''_1L''_4 + L'''_1L'''_4 + L_1^{IV}L_4^{IV} + \cdots + L_1^{(n)}L_4^{(n)} = 0,$$
$$L'_2L'_4 + L''_2L''_4 + L'''_2L'''_4 + L_2^{IV}L_4^{IV} + \cdots + L_2^{(n)}L_4^{(n)} = 0,$$
$$L'_3L'_4 + L''_3L''_4 + L'''_3L'''_4 + L_3^{IV}L_4^{IV} + \cdots + L_3^{(n)}L_4^{(n)} = 0.$$

En continuant à raisonner ainsi, on voit qu'on peut trouver des nombres $L'_5, L''_5, \ldots, L_5^{(n)}$; $L'_6, L''_6, \ldots, L_6^{(n)}$; ...; $L'_n, L''_n, \ldots, L_n^{(n)}$ tels que tous les L ayant le même indice ne soient pas simultanément nuls et tels que

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} [L_i^{(\nu)} L_j^{(\nu)}] = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} i \text{ et } j \text{ étant deux nombres différents} \\ \text{choisis de toutes les manières possibles} \\ \text{parmi les nombres } 1, 2, \ldots, n. \end{array} \right.$$

Posons enfin

$$l'_1 = \frac{L'_1}{+\sqrt{L'^2_1 + \cdots + [L^{(n)}_1]^2}}, \quad l''_1 = \frac{L''_1}{+\sqrt{L'^2_1 + \cdots + [L^{(n)}_1]^2}}, \ldots,$$

$$l^{(n)}_1 = \frac{L^{(n)}_1}{+\sqrt{L'^2_1 + \cdots + [L^{(n)}_1]^2}};$$

$$l'_2 = \frac{L'_2}{+\sqrt{L'^2_2 + \cdots + [L^{(n)}_2]^2}}, \quad l''_2 = \frac{L''_2}{+\sqrt{L'^2_2 + \cdots + [L^{(n)}_2]^2}}, \ldots,$$

$$l^{(n)}_2 = \frac{L^{(n)}_2}{+\sqrt{L'^2_2 + \cdots + [L^{(n)}_2]^2}};$$

. . . .

$$l'_n = \frac{L'_n}{+\sqrt{L'^2_n + \cdots + [L^{(n)}_n]^2}}, \quad l''_n = \frac{L''_n}{+\sqrt{L'^2_n + \cdots + [L^{(n)}_n]^2}}, \ldots,$$

$$l^{(n)}_n = \frac{L^{(n)}_n}{+\sqrt{L'^2_n + \cdots + [L^{(n)}_n]^2}}.$$

On constate immédiatement que les l satisfont aux égalités (2) et (3) du § 297. Soit (T) la transformation linéaire orthogonale qui répond au système de valeurs choisi des l (les l_{n+1} sont supposés pris égaux à zéro).

On a, d'après (3), § 297,

$$l'_1 l'_k + l''_1 l''_k + \cdots + l^{(n)}_1 l^{(n)}_k = 0 \quad (k = 2, 3, \cdots, n).$$

D'après (3), § 304, on a

$$a_1 l'_k + a_2 l''_k + \cdots + a_n l^{(n)}_k = 0 \quad (k = 2, 3, \ldots, n).$$

De là on déduit sans la moindre difficulté que (T) transforme l'hyperplan $x_1 = 0$ dans l'hyperplan (1), § 304.

En procédant exactement de la même manière que nous venons de le faire, nous pouvons trouver une transformation linéaire orthogonale (T′) qui transforme l'hyperplan $x_1 = 0$ dans l'hyperplan (2), § 304.

Effectuons maintenant sur chaque point P de l'espace les opérations suivantes : passons de P au point P′ dont P est le transformé dans (T); passons ensuite de P′ au transformé P″ de P′ dans (T′). La transformation ainsi obtenue est une transformation linéaire orthogonale (§§ 300 et 301) ; elle transforme l'hyperplan (1), § 304, dans l'hyperplan (2), § 304, et l'origine en elle-même.

C. q. f. d.

305. Remarque. D'après le § 284, l'espace euclidien à n dimensions est un objet purement analytique. Nous n'avons pas exclu dans ce chapitre la valeur 3 de n; en faisant $n = 3$ nous obtenons ainsi un objet analytique qu'on pourrait appeler *espace analytique euclidien à trois dimensions.* On voit aisément que les définitions du § 4 coïncident avec celles de ce chapitre pour $n = 3$. L'espace analytique euclidien à trois dimensions satisfait donc d'après le § 4 aux postulats du § 3; c'est précisément de cet espace que nous nous sommes servis au § 4 pour établir la compatibilité des postulats en question. L'espace analytique euclidien à trois dimensions doit être distingué de l'espace géométrique euclidien à trois dimensions. Lorsqu'on assujetit des objets à satisfaire aux postulats du § 3, la nature des objets en question est déterminée par cette condition sous certains rapports, mais nullement sous tous les rapports. Au point de vue où nous nous plaçons dans tout ce livre, l'espace géométrique euclidien à trois dimensions est par définition constitué par n'importe quels objets satisfaisant aux postulats du § 3; la nature de cet espace est donc laissée en partie indéterminée. L'espace analytique euclidien à trois dimensions au contraire est constitué par des objets satisfaisant aux postulats du § 3 dont la nature est déterminée sous tous les rapports, ces objets étant édifiés au moyen de nombres et de certaines relations entre des nombres.

Lorsque dans la suite nous emploierons l'expression « espace euclidien à trois dimensions », nous désignerons par là l'espace géométrique euclidien à trois dimensions. Lorsqu'en considérant l'espace euclidien à trois dimensions nous appelons pour la brièveté une équation surface et un système de deux équations ligne, nous aurons toujours en vue la surface ou la ligne dans l'espace géométrique représentée par les équations en question quand on les rapporte à un système de coordonnées supposé bien déterminé.

CHAPITRE XI.

Compatibilité de l'hypothèse de l'angle obtus avec les postulats de la géométrie générale.

306. Pour établir que l'hypothèse de l'angle obtus est compatible avec les postulats de la géométrie générale, nous allons faire correspondre aux différents concepts fondamentaux de la géométrie générale certaines classes d'objets existant dans le domaine des nombres. Nous désignerons ces objets par les termes servant à désigner les concepts fondamentaux géométriques correspondants suivis du mot elliptique ; nous emploierons ici le terme elliptique parce que, comme nous le verrons plus loin, l'hypothèse de l'angle obtus est le point de départ de la géométrie elliptique.

307. Plaçons-nous dans l'espace euclidien à quatre dimensions. Désignons les coordonnées d'un point quelconque par x_1, x_2, x_3, x_4 ; soit r un nombre fixe positif.

Considérons l'hypersurface

$$(1) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = r^2.$$

Appelons *point elliptique* tout point de cette hypersurface dont la quatrième coordonnée x_4 est différente de zéro et positive.

Appelons *plan elliptique* l'ensemble des points elliptiques appartenant à un hyperplan représenté par une équation de la forme

$$(2) \qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0,$$

où l'on n'a pas $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Appelons *droite elliptique* l'ensemble des points elliptiques appartenant à un plan représenté par un système d'équations de la forme

$$(3) \qquad \begin{cases} a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3 + a'_4 x_4 = 0, \\ a''_1 x_1 + a''_2 x_2 + a''_3 x_3 + a''_4 x_4 = 0, \end{cases}$$

où l'on a

(4) $$\begin{Vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ a''_1 & a''_2 & a''_3 \end{Vmatrix} \neq 0.$$

Donnons dans (1), (2) et (3), § 307 à x_4 une valeur positive x'_4 suffisamment petite. Les équations

(5) $$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2 - x'^2_4,$$

(6) $$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = - a_4x'_4,$$

rapportées dans l'espace euclidien à trois dimensions à un système d'axes coordonnés rectangulaires $O_1X_1X_2X_3$, représentent respectivement une sphère et un plan, qui se coupent si x'_4 est assez petit. Les équations

(7) $$\begin{cases} a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 = - a'_4x'_4, \\ a''_1x_1 + a''_2x_2 + a''_3x_3 = - a''_4x'_4, \end{cases}$$

rapportées aux axes $O_1X_1X_2X_3$, représentent une droite, d'après (4), § 307. Cette droite coupera la sphère (5), § 307, si x'_4 est assez petit.

On peut donc trouver à coup sûr un système de valeurs de x_1, x_2, x_3 vérifiant à la fois (5) et (6), § 307 et un autre système de valeurs des mêmes variables vérifiant à la fois (5) et (7), § 307. Un plan elliptique et une droite elliptique contiennent donc toujours au moins un point elliptique.

Si dans (2), § 307 on avait $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, cette équation entraînerait $x_4 = 0$ et l'hyperplan correspondant ne contiendrait aucun point elliptique.

Si dans (3), § 307 on avait $\begin{Vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ a''_1 & a''_2 & a''_3 \end{Vmatrix} = 0$, ces équations entraîneraient $x_4 = 0$ et le plan correspondant ne contiendrait aucun point elliptique.

308. Maintenant nous allons montrer que les points, droites et plans elliptiques satisfont aux postulats de l'appartenance de la géométrie générale.

Soient A (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) et B $(x''_1, x''_2, x''_3, x''_4)$ deux points elliptiques distincts. Si ces points étaient en ligne droite avec l'origine, on aurait $\begin{Vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 & x''_4 \end{Vmatrix} = 0$

(§ 289). On aurait alors

$$x''_1 = \rho x'_1, \quad x''_2 = \rho x'_2, \quad x''_3 = \rho x'_3, \quad x''_4 = \rho x'_4,$$
$$\rho^2 (x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 + x'^2_4) = x''^2_1 + x''^2_2 + x''^2_3 + x''^2_4,$$
$$x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 + x'^2_4 = x''^2_1 + x''^2_2 + x''^2_3 + x''^2_4$$

(d'après (1), § 307),

$$\rho^2 = 1,$$
$$\rho = \pm 1.$$

Comme x'_4 et x''_4 sont de même signe, on aurait $\rho = +1$, et les deux points ne seraient pas distincts. Les points A et B ne sont donc pas en ligne droite avec l'origine. Il existe un plan et un seul passant par ces deux points et par l'origine (§ 290). Dans l'équation de ce plan on n'a pas $\begin{Vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ a''_1 & a''_2 & a''_3 \end{Vmatrix} = 0$, puisqu'il contient des points elliptiques. Ce plan détermine donc une droite elliptique. Le premier postulat de l'appartenance est donc établi.

Donnons maintenant à x_4 dans les équations (1) et (3), § 307 successivement deux valeurs positives différentes suffisamment petites. On voit comme au § 307 que l'on pourra trouver chaque fois un système de valeurs de x_1, x_2 et x_3 vérifiant les équations obtenues. On trouve ainsi deux points elliptiques distincts appartenant à une droite elliptique donnée.

Supposons maintenant donné un plan elliptique α et soit (2), § 307 l'hyperplan qui le contient. Soit (T) une transformation linéaire orthogonale de l'espace à quatre dimensions qui laisse l'origine des coordonnées invariante et transforme l'hyperplan (2), § 307 dans l'hyperplan

(II) $$x_4 = 0 \quad (\S\ 304).$$

(T) transformera l'hypersurface (1), § 307 en elle-même (§ 298); (T) transformera l'hyperplan

(3) $$x_4 = 0$$

dans un hyperplan

(III) $$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 = 0 \quad (\S\ 302).$$

Si l'on avait $A_1 = A_2 = A_3 = 0$, les hyperplans (II) et

(III), § 308 coïncideraient, et les hyperplans (2), § 307 et (3), § 308 coïncideraient aussi, ce qui est exclu. On n'a donc pas $A_1 = A_2 = A_3 = 0$.

α est l'ensemble des points communs à (1) et (2), § 307 pour lesquels le premier membre de (3), § 308 est positif. A α correspondra dans (T) l'ensemble des points communs à (1), § 307 et (II), § 308 pour lesquels le premier membre de (III), § 308 a un signe déterminé, qui sera le signe $+$ si nous choisissons convenablement A_1, A_2, A_3 et A_4. En d'autres mots, (T) fait correspondre à α l'ensemble des points de

(4) $$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2,$$

(5) $$x_4 = 0$$

pour lesquels le premier membre de

(6) $$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = 0$$

est positif.

Si nous rapportons (4) et (6), § 308 à un système de trois axes coordonnés rectangulaires $O_1X_1X_2X_3$ dans l'espace euclidien à trois dimensions, nous voyons qu'à α correspond l'ensemble des points d'une moitié de la sphère (4), § 308, les points du grand cercle limitant l'hémisphère étant exclus.

Nous pouvons toujours trouver sur cet hémisphère trois points x'_1, x'_2, x'_3; x''_1, x''_2, x''_3; x'''_1, x'''_2, x'''_3 non situés dans un même plan avec l'origine O_1. On a alors d'après la géométrie analytique à trois dimensions

$$\begin{vmatrix} x'_1 & x''_1 & x'''_1 & 0 \\ x'_2 & x''_2 & x'''_2 & 0 \\ x'_3 & x''_3 & x'''_3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

ou bien

(7) $$\begin{Vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 & 0 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 & 0 \\ x'''_1 & x'''_2 & x'''_3 & 0 \end{Vmatrix} \neq 0.$$

Dans l'espace à quatre dimensions, les trois points $A'(x'_1, x'_2, x'_3, 0)$, $B'(x''_1, x''_2, x''_3, 0)$ et $C'(x'''_1, x'''_2, x'''_3, 0)$

appartiennent à (4) et (5), § 308 et leurs coordonnées rendent positif le premier membre de (6), § 308. De plus, d'après (7), § 308, A′, B′ et C′ ne sont pas situés dans un même plan avec l'origine des coordonnées.

Soient A, B et C les points dont A′, B′ et C′ sont les transformés dans (T). A, B et C seront des points elliptiques de α. De plus, A, B et C ne seront pas dans un même plan avec l'origine. A, B et C n'appartiennent donc pas à une même droite elliptique.

Dans un plan elliptique donné, on peut donc toujours trouver trois points elliptiques non situés sur une même droite elliptique.

Le troisième postulat de l'appartenance est donc établi.

Trois points elliptiques qui ne sont pas sur une même droite elliptique ne sont pas dans un même plan avec l'origine. Il y a donc un hyperplan et un seul passant par l'origine et par ces trois points (§ 292). Par là le deuxième postulat de l'appartenance se trouve établi.

Le quatrième postulat de l'appartenance résulte du § 293.

Considérons ensuite deux équations de la forme

$$a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3 + a'_4 x_4 = 0,$$
$$a''_1 x_1 + a''_2 x_2 + a''_3 x_3 + a''_4 x_4 = 0,$$

où l'on n'a pas $a'_1 = a'_2 = a'_3 = 0$ ni $a''_1 = a''_2 = a''_3 = 0$. Si l'on a $\left\| \begin{matrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ a''_1 & a''_2 & a''_3 \end{matrix} \right\| = 0$, ou bien on a $x_4 = 0$ pour toutes les solutions communes aux deux équations, ou bien les deux équations sont équivalentes. Cette remarque permet d'établir sans la moindre difficulté le cinquième postulat de l'appartenance.

Considérons ensuite le plan elliptique contenu dans l'hyperplan $x_1 = 0$. Prenons dans ce plan elliptique trois points A, B et C non situés en ligne droite. Nous pouvons trouver un point elliptique D non situé dans le plan elliptique ABC. Les quatre points elliptiques A, B, C et D ne sont pas situés dans un même plan elliptique. Le sixième postulat de l'appartenance est ainsi démontré.

De ce qui vient d'être établi, il résulte que les points, droites et plans elliptiques satisfont au théorème I 1 du § 10.

309. Supposons donnée une droite elliptique et soient (3), § 307 les équations du plan passant par l'origine qui la contient. Les équations (1) et (3) du § 307 réunies représentent dans l'espace à quatre dimensions une ligne. Coupons cette ligne par l'hyperplan $x_4 = 0$. Pour trouver les points d'intersection, il faut résoudre les équations

(1) $$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2,$$

(2) $$\begin{cases} a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3 = 0, \\ a''_1 x_1 + a''_2 x_2 + a''_3 x_3 = 0. \end{cases}$$

Les équations (2), § 309 représentent dans l'espace euclidien à trois dimensions une droite passant par l'origine; l'équation (1), § 309 représente une sphère dont l'origine est le centre. Les équations (1) et (2), § 309 admettent donc deux solutions parfaitement déterminées, de la forme x'_1, x'_2, x'_3 et $-x'_1$, $-x'_2$, $-x'_3$ (x'_1, x'_2, x'_3 ne sont pas simultanément nuls).

Nous trouvons ainsi deux points d'intersection de la ligne (1) et (3), § 307 avec l'hyperplan $x_4 = 0$. Ces points sont les points A $(x'_1, x'_2, x'_3, 0)$ et B $(-x'_1, -x'_2, -x'_3, 0)$. Choisissons un des deux points A ou B en nous conformant à la règle suivante : quand $x'_1 \neq 0$, nous choisissons A si $x'_1 > 0$ et B dans le cas contraire; quand $x'_1 = 0$ et $x'_2 \neq 0$, nous choisissons A si $x'_2 > 0$ et B dans le cas contraire; enfin, quand $x'_1 = x'_2 = 0$, nous choisissons A si $x'_3 > 0$ et B dans le cas contraire. Soit S le point choisi. Dans ce chapitre, nous dirons par convention que S est *l'origine des arcs sur la droite elliptique donnée.*

Soit M un point elliptique quelconque de la droite elliptique donnée; désignons par O l'origine des coordonnées. Posons

$$s = \sphericalangle \mathrm{SOM}.\, r.$$

Le nombre s est parfaitement déterminé (§ 296). Dans ce chapitre, nous dirons par convention que le nombre s

est *l'abscisse curviligne du point elliptique* M *comptée suivant la droite elliptique donnée.*

A chaque droite elliptique correspond donc une origine des arcs parfaitement déterminée; chaque point elliptique d'une droite elliptique donnée a une abscisse curviligne parfaitement déterminée.

Etant donnés trois points elliptiques distincts A, B et C, situés sur une même droite elliptique, nous dirons que B est *situé entre* A et C si l'abscisse curviligne de B comptée suivant la droite elliptique AC est comprise entre les abscisses curvilignes de A et C comptées suivant la même droite.

310. Pour montrer que dans un plan elliptique il y a toujours au moins trois points elliptiques n'appartenant pas à une même droite elliptique, nous avons effectué, au § 308, une transformation linéaire orthogonale de l'espace à quatre dimensions qui laissait l'origine invariante et qui transformait le plan elliptique donné dans un certain ensemble de points situés dans l'hyperplan $x_4 = 0$; soit (T) cette transformation linéaire orthogonale. Après avoir effectué la transformation (T), nous avons, au § 308, interprété géométriquement dans l'espace euclidien à trois dimensions l'ensemble de points de l'espace à quatre dimensions fourni par (T) et situé dans l'hyperplan $x_4 = 0$; désignons par (T_1) ce passage de l'espace analytique à quatre dimensions à l'espace géométrique à trois dimensions. Chaque fois que dans la suite de ce chapitre nous aurons à étudier un plan elliptique, nous effectuerons une transformation pareille à (T) et un passage à l'espace géométrique à trois dimensions pareil à (T_1). Nous dirons à l'avenir que cette transformation pareille à (T) et ce passage à l'espace tridimensional pareil à (T_1) constituent ensemble une transformation (M) relative au plan elliptique considéré. Nous désignerons toujours les axes coordonnés servant de repaire dans l'espace à trois dimensions par O_1X_1, O_1X_2 et O_1X_3.

Nous désignerons l'origine des coordonnées dans l'espace à quatre dimensions par O.

Nous avons vu au § 308 que si l'on effectue une transformation (M) relativement à un plan elliptique α, α est transformé en une demi-sphère α_1 de centre O_1 et de rayon r, les points du grand cercle qui limitent la demi-sphère étant exclus de celle-ci.

Supposons donnée une droite elliptique a située dans le plan elliptique α; soient

$$(1) \qquad \begin{cases} a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3 + a'_4 x_4 = 0, \\ a''_1 x_1 + a''_2 x_2 + a''_3 x_3 + a''_4 x_4 = 0 \end{cases}$$

les équations du plan passant par O qui contient a. La transformation linéaire orthogonale (T) faisant partie de (M) transforme ce plan en un plan

$$(I) \qquad \begin{cases} A'_1 x_1 + A'_2 x_2 + A'_3 x_3 + A'_4 x_4 = 0, \\ A''_1 x_1 + A''_2 x_2 + A''_3 x_3 + A''_4 x_4 = 0. \end{cases}$$

On ne peut avoir à la fois $A'_1 = A'_2 = A'_3 = 0$ et $A''_1 = A''_2 = A''_3 = 0$. Supposons par exemple qu'on n'a pas $A'_1 = A'_2 = A'_3 = 0$. $x_4 = 0$ est une conséquence de (I), § 310; il en résulte que les équations (I), § 310 sont équivalentes aux équations

$$A'_1 x_1 + A'_2 x_2 + A'_3 x_3 + A'_4 x_4 = 0,$$
$$x_4 = 0,$$

ou

$$(2) \qquad A'_1 x_1 + A'_2 x_2 + A'_3 x_3 = 0,$$

$$(3) \qquad x_4 = 0,$$

qui représentent donc aussi le transformé du plan (1), § 310 dans (T).

a, c'est l'ensemble des points communs à α et à (1), § 310. (T) fera correspondre à a l'ensemble des points communs à (2) et (3), § 310 et au transformé de α. Enfin, (M) fera correspondre à a l'ensemble des points communs à la demi-sphère α_1 et au plan (2), § 310, qui passe par O_1. Comme a contient au moins deux points, il y aura des points communs à α_1 et à (2), § 310. (2), § 310 ne coïncide donc pas avec le plan qui limite α_1, et par conséquent l'ensemble des points communs à (2), § 310 et à α_1 con-

stitue un demi-grand cercle tracé sur α_1. Soit a_1 ce demi-grand cercle, les extrémités étant exclues. (M) transforme ainsi a en a_1.

On voit de plus par les §§ 298 et 303 que, A et B étant deux points de α et A_1 et B_1 leurs correspondants sur α_1, on a $\measuredangle AOB = \measuredangle A_1O_1B_1$ et $AB = A_1B_1$ (AB et A_1B_1 désignant les distances rectilignes). Si A, B et C sont trois points de α et A_1, B_1 et C_1 leurs correspondants sur α_1, on a

$$\measuredangle ABC = \measuredangle A_1B_1C_1.$$

S étant l'origine des arcs sur a, (M) fera correspondre à S un des points d'intersection S_1 du grand cercle dont a_1 fait partie avec le grand cercle qui limite α_1.

311. Abordons maintenant les postulats de l'ordre de la géométrie générale.

Supposons donnée une droite elliptique quelconque a ; soient S l'origine des arcs sur a, et M un point quelconque de a. D'après le § 308, nous pouvons trouver un plan elliptique α passant par a.

Effectuons une transformation (M) relative à α. Soient α_1, a_1, S_1 et M_1 la demi-sphère, le demi-grand cercle et les points répondant à α, a, S et M (§ 310). On a d'après le § 310

$$\measuredangle SOM = \measuredangle S_1O_1M_1,$$
$$r(\measuredangle SOM) = r(\measuredangle S_1O_1M_1) = \text{mesure de l'arc } S_1M_1.$$

L'abscisse curviligne de M comptée suivant a est donc égale à la mesure de l'arc de a_1 limité aux points S_1 et M_1. Soit R_1 le point diamétralement opposé à S_1. M_1 est toujours distinct de S_1 et de R_1. On a donc toujours $0 <$ mesure de l'arc $S_1M_1 < \pi r$. L'abscisse curviligne d'un point elliptique d'une droite elliptique est donc toujours comprise entre 0 et πr et ne peut égaler ces limites. Il résulte de plus de l'interprétation que nons venons de trouver qu'à chaque valeur de l'abscisse curviligne comprise entre 0 et πr correspond un point elliptique et un seul sur a.

Maintenant on peut constater immédiatement que les points d'une droite elliptique et leurs relations d'ordre

satisfont aux trois premiers postulats de l'ordre de la géométrie générale.

On définit maintenant le *segment elliptique* déterminé par deux points elliptiques distincts de la même manière qu'on a défini le segment au § 10.

Soient maintenant A, B et C trois points elliptiques non situés sur une même droite elliptique ; soit a une droite elliptique du plan ABC qui ne passe par aucun des trois points A, B ou C et qui passe par un point du segment elliptique (AB). Désignons par α le plan elliptique ABC. Effectuons une transformation (M) relativement à α. Soient α_1, A_1, B_1, C_1 et a_1 la demi-sphère, les points et le demi-grand cercle correspondant à α, A, B, C et a. Le segment elliptique (AB) répondra d'après ce qui a été vu plus haut à l'arc de grand cercle A_1B_1. a_1 ne passera ni par A_1, ni par B_1, ni par C_1, mais a_1 passera par un point de l'arc A_1B_1. D'après la géométrie euclidienne, a_1 devra passer par un point de l'arc B_1C_1 ou de l'arc A_1C_1. a passe donc par un point du segment (BC) ou du segment (AC). Le quatrième postulat de l'ordre se trouve ainsi établi.

Les points, droites et plans elliptiques et les relations d'ordre entre les points elliptiques satisfont donc à tous les postulats de l'ordre de la géométrie générale. On peut donc aussi étendre immédiatement toutes les définitions et tous les théorèmes du § 10 rattachés aux postulats de l'ordre aux points, droites et plans elliptiques et à leurs relations de situé entre.

312. Etant donné un segment elliptique (AB), nous appellerons *longueur* de ce segment elliptique le nombre $r \sphericalangle AOB$, O désignant l'origine des coordonnées dans l'espace à quatre dimensions. Nous dirons que deux segments elliptiques sont *congruents* s'ils ont même longueur.

Nous définissons *l'angle elliptique* comme nous avons défini l'angle au § 10.

Supposons donné un angle elliptique ; soient a_1 et a_2 les semi-droites elliptiques qui le forment ; soit P le sommet

de cet angle ; soient respectivement S_1 et S_2 les origines des arcs sur les supports de a_1 et de a_2. Soient A_1 et A_2 deux points elliptiques distincts de P et appartenant respectivement à a_1 et à a_2. Soient s_{a_1} et s_1 les abscisses curvilignes de A_1 et de P comptées suivant le support de a_1 et s_{a_2} et s_2 celles de A_2 et de P comptées suivant le support de a_2. Considérons dans l'espace à quatre dimensions les deux semi-droites $|PA_1$ et $|PA_2$. L'angle θ de ces deux semi-droites est un nombre parfaitement déterminé quand A_1 et A_2 sont donnés (§ 296). θ est une fonction de s_{a_1} et de s_{a_2}.

Effectuons une transformation (M) relativement au plan elliptique α défini par a_1 et a_2. Soient α', P', S'_1, S'_2, A'_1 et A'_2 l'hémisphère et les points correspondant à α, P, S_1, S_2, A_1 et A_2. S'_1, P' et A'_1 d'une part, S'_2, P' et A'_2 d'autre part seront sur un même demi-grand cercle tracé sur α'.

$|s_{a_1} - s_1|$ est égal à la mesure de l'arc $P'A'_1$ et $|s_{a_2} - s_2|$ est égal à la mesure de l'arc $P'A'_2$. On a de plus $\theta = \sphericalangle A'_1P'A'_2$, $\sphericalangle A'_1P'A'_2$ étant la mesure de l'angle des semi-droites $|P'A'_1$ et $|P'A'_2$, non pas de celui des grands cercles $P'A'_1$ et $P'A'_2$. Faisons tendre s_{a_1} vers s_1 et s_{a_2} vers s_2, de façon que A_1 et A_2 restent toujours sur a_1 et a_2 respectivement. A'_1 et A'_2 resteront toujours d'un même côté de P' et tendront vers P'. La droite $P'A'_1$ tendra vers la tangente en P' au grand cercle S'_1P', la droite $P'A'_2$ tendra vers la tangente en P' au grand cercle S'_2P'. $\sphericalangle A'_1P'A'_2$ tendra vers une limite bien déterminée, qui est la mesure d'un des angles que font en P' les grands cercles S'_1P' et S'_2P'. θ tendra donc aussi vers une limite déterminée, qui ne dépend que de l'angle elliptique donné. Nous appellerons cette limite *l'amplitude* de l'angle elliptique en question.

Nous dirons que deux angles elliptiques sont *congruents* s'ils ont même amplitude.

Remarquons en passant que la longueur du segment elliptique (PA_1) est égale à la mesure de l'arc de grand cercle $P'A'_1$. La longueur du segment elliptique (PA_1) est donc $|s_{a_1} - s_1|$. Quand s_{a_1} tend vers s_1, cette longueur

tend vers zéro. La distance PA_1 est égale à la mesure du segment rectiligne $(P'A'_1)$. Quand s_{a_1} tend vers s_1, la mesure du segment rectiligne $(P'A'_1)$ tend vers zéro et la distance PA_1 tend donc aussi vers zéro. Les mêmes conclusions s'appliquent évidemment aux points P, A_2, P' et A'_2.

313. En employant les transformations (M) et en continuant à raisonner d'après la méthode suivie jusqu'ici, on démontre maintenant sans la moindre difficulté que les points, droites et plans elliptiques, les relations d'ordre entre les points d'une droite elliptique et les relations de congruence entre les segments et angles elliptiques satisfont aux postulats de la congruence et de la continuité de la géométrie générale. En réunissant les résultats acquis dans les §§ 307 — 313, on voit que les objets elliptiques définis dans ces paragraphes satisfont à tous les postulats de la géométrie générale.

314. Maintenant nous allons établir que ces objets elliptiques satisfont à l'hypothèse de l'angle obtus.

Montrons d'abord que l'amplitude d'un angle elliptique est égale à sa mesure dans le sens du § 146. Tous les angles elliptiques congruents entre eux ont même mesure et aussi même amplitude. L'amplitude est donc une fonction de la mesure. Désignons la mesure par θ et l'amplitude par $f(\theta)$. $f(\theta)$ est une fonction de θ univoquement définie pour toutes les valeurs de θ satisfaisant à $0 < \theta < \pi$. En faisant appel aux transformations (M), on voit aisément que $f(\theta)$ est une fonction continue de θ. θ_1 et θ_2 étant deux nombres positifs tels que $0 < \theta_1 + \theta_2 < \pi$, on voit aisément qu'on a

$$f(\theta_1 + \theta_2) = f(\theta_1) + f(\theta_2).$$

De là on déduit que, θ satisfaisant à $0 < \theta < \pi$, et k et l étant deux nombres entiers positifs tels que $0 < \frac{k}{l}\theta < \pi$, on a

$$f\left(\frac{k}{l}\theta\right) = \frac{k}{l} f(\theta).$$

Soit maintenant m un nombre positif quelconque tel que $0 < m\theta < \pi$. Nous pouvons trouver une suite infinie de nombres entiers positifs $k_1, k_2, \ldots, k_\nu, \ldots$ et une suite infinie de nombres entiers positifs $l_1, l_2, \ldots, l_\nu, \ldots$ tels que $\lim\limits_{\nu=+\infty} \frac{k_\nu}{l_\nu} = m$ et tels que l'on a $0 < \frac{k_\nu}{l_\nu}\theta < \pi$ pour toutes les valeurs entières et positives de ν. On a alors

$$f\left(\frac{k_\nu}{l_\nu}\cdot\theta\right) = \frac{k_\nu}{l_\nu} f(\theta),$$

$$\lim f\left(\frac{k_\nu}{l_\nu}\theta\right) = f(m\theta),$$

$$\lim \frac{k_\nu}{l_\nu} f(\theta) = mf(\theta),$$

$$f(m\theta) = mf(\theta).$$

En particulier on a

$$f\left(m\frac{\pi}{2}\right) = m f\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ pour } 0 < m\frac{\pi}{2} < \pi.$$

En faisant de nouveau appel aux transformations (M), on voit aisément que l'amplitude d'un angle elliptique droit est $\frac{\pi}{2}$. On a donc

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$$

$$f\left(m\frac{\pi}{2}\right) = m\frac{\pi}{2} \text{ pour } 0 < m\frac{\pi}{2} < \pi,$$

$$f(\theta) = \theta \text{ pour } 0 < \theta < \pi.$$

L'amplitude d'un angle elliptique est donc toujours égale à sa mesure.

Soit maintenant ABC un triangle elliptique. Effectuons une transformation (M) relative au plan elliptique ABC. Soit $A_1B_1C_1$ le triangle sphérique de l'espace euclidien à trois dimensions qui répond au triangle elliptique ABC. Les amplitudes des angles elliptiques du triangle elliptique ABC sont respectivement égales aux mesures des angles du triangle sphérique $A_1B_1C_1$ (§ 312). Les mesures

des angles elliptiques du triangle elliptique ABC sont donc respectivement égales aux mesures des angles du triangle sphérique $A_1B_1C_1$, d'après ce que nous venons de démontrer. Or, nous savons d'après la géométrie euclidienne que la somme des mesures des angles d'un triangle sphérique est supérieure à π. La somme des mesures des angles elliptiques d'un triangle elliptique est donc aussi supérieure à π.

Les objets elliptiques satisfont donc à l'hypothèse de l'angle obtus.

315. Théorème. *L'hypothèse de l'angle obtus est compatible avec les postulats de la géométrie générale.*

Démonstration. Nous avons vu aux §§ 307 – 314 que les points, droites et plans elliptiques, les relations d'ordre entre les points d'une droite elliptique et les relations de congruence entre les segments et les angles elliptiques satisfont aux postulats de la géométrie générale et à l'hypothèse de l'angle obtus. Ces objets elliptiques existent dans le domaine des nombres (§ 283). Les propriétés des nombres ne sont jamais contradictoires entre elles (§ 4). Il n'y a donc pas non plus de contradiction possible entre les postulats de la géométrie générale et l'hypothèse de l'angle obtus.

316. Remarque. En considérant une moitié de l'hypersurface

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = r^2,$$

et en considérant les intersections de cette demi-hypersurface avec les droites, les plans et les hyperplans passant par l'origine, nous avons obtenu une image de la géométrie générale de l'espace dans le cas de l'angle obtus.

En considérant dans l'espace euclidien à trois dimensions une moitié de la sphère

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2,$$

et en considérant les intersections de cette demi-sphère avec les droites et les plans passant par l'origine, on obtient exactement de la même manière une image de la géométrie générale plane dans le cas de l'angle obtus.

En d'autres mots, la géométrie de la sphère dans l'espace euclidien est une image de la géométrie générale plane dans le cas de l'angle obtus, pourvu qu'on reste à l'intérieur d'une moitié de la surface sphérique considérée.

317. Dans les chapitres IX et XI nous avons acquis un résultat d'une importance capitale. Dans ces chapitres nous avons établi que dans la géométrie générale on peut, à côté de la route répondant à l'hypothèse de l'angle droit, suivre deux autres voies. La géométrie générale se divise donc en trois branches, et nous sommes sûrs que l'on pourra développer chacune de ces trois branches aussi loin qu'on voudra sans jamais se heurter à des contradictions.

Nous allons maintenant continuer l'étude de la géométrie générale pour découvrir quelle est la portée de chacune des trois hypothèses du § 208. Les théorèmes contenus dans les chapitres suivants seront vrais dans les trois hypothèses à la fois, à moins que nous ne fassions observer expressément le contraire.

CHAPITRE XII.

Somme des mesures des angles d'un triangle infiniment petit.

318. Définition. On appelle *excès* d'un triangle le nombre obtenu en retranchant π de la somme des mesures de ses angles. L'excès d'un triangle est toujours positif, toujours nul ou toujours négatif suivant qu'on admet l'hypothèse de l'angle obtus, de l'angle droit ou de l'angle aigu.

319. Théorème. *L'excès d'un triangle est égal à la somme des excès des triangles dans lesquels le triangle donné est partagé par la droite joignant un des sommets à un point du côté opposé.*

Démonstration. Soient ABC un triangle quelconque et D un point situé entre A et B. On a

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA + \sphericalangle CAB - \pi = \sphericalangle DBC + \sphericalangle BCD + \sphericalangle DCA + \sphericalangle CAD - \pi + \sphericalangle ADC + \sphericalangle BDC - \pi$$
$$= (\sphericalangle DBC + \sphericalangle BCD + \sphericalangle BDC - \pi) + (\sphericalangle DCA + \sphericalangle CAD + \sphericalangle ADC - \pi).$$

C. q. f. d.

320. Définition. On appelle *excès* d'un polygone convexe de n côtés le nombre obtenu en retranchant $\pi\,(n-2)$ de la somme des mesures de ses angles.

321. Théorème. *Si l'on partage un polygone convexe en deux autres polygones convexes par une droite passant par un point intérieur à ce polygone, l'excès du polygone donné est égal à la somme des excès des polygones partiels.*

Démonstration. Supposons d'abord que la droite par laquelle on effectue le partage passe par deux sommets du polygone donné. Soient respectivement $l+1$, $m+1$ et n les nombres de côtés des deux polygones partiels et du polygone donné. Soient respectivement S', S'' et S les

sommes des mesures des angles de ces trois polygones. On a

$$l+m=n,$$
$$S'+S''=S,$$
$$[S'-\pi(l+1-2)]+[S''-\pi(m+1-2)]=S-\pi(n-2).$$

C. q. f. d.

Le cas où la droite par laquelle on effectue le partage coupe le périmètre du polygone donné en des points qui ne sont pas des sommets se traite en apportant au raisonnement précédent une légère modification qui n'offre aucune difficulté.

322. Théorème. *L'excès d'un polygone convexe est toujours positif, toujours nul ou toujours négatif suivant qu'on se place dans l'hypothèse de l'angle obtus, dans celle de l'angle droit ou dans celle de l'angle aigu.*

Démonstration. Pour établir ce théorème, il suffit de remarquer qu'on peut partager un polygone convexe de n côtés en $n-2$ triangles en joignant un de ses sommets aux $n-3$ sommets autres que le sommet précédent et le sommet suivant immédiatement le sommet donné.

323. Théorème. *Le quatrième angle dans un quadrilatère trirectangle et les angles opposés aux angles droits dans un quadrilatère birectangle isoscèle sont toujours aigus, droits ou obtus suivant qu'on se place dans l'hypothèse de l'angle aigu, dans celle de l'angle droit ou dans celle de l'angle obtus.*

324. Théorème. *Étant donné un segment quelconque fixe* (AB), *on peut faire correspondre à chaque nombre positif* α *arbitrairement petit un nombre positif* β *suffisamment petit pour que l'excès de tous les triangles dont un côté a une mesure inférieure à* AB *et un autre côté une mesure inférieure à* β *soit moindre que* α *en valeur absolue.*

Démonstration. Soit C un point fixe de la droite AB tel que A soit entre C et B et soit D un point fixe de la même droite tel que B soit entre A et D. Soit E un point fixe non situé sur la droite CD. Soit X un point de la droite CE situé entre C et E. Laissons d'abord X fixe et désignons par Y un point variable situé sur (DX) ou sur (XC) et par Z un point variable de (AB). Désignons par x

le nombre DY si Y est sur (DX) et le nombre DX + XY si Y est sur (CX). YZ est une fonction de x et de BZ définie pour $0 \leqslant x \leqslant \mathrm{DX} + \mathrm{XC}$ et $0 \leqslant \mathrm{BZ} \leqslant \mathrm{BA}$. On déduit aisément du § 159 que YZ est une fonction continue des deux variables x et BZ dans tout le domaine où elle est définie. Or, si une fonction $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ des n variables indépendantes $x_1, x_2, ..., x_n$ est continue dans le domaine $a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2, ..., a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$, il existe dans ce domaine un système de valeurs des variables indépendantes tel que la valeur de la fonction qui y répond soit inférieure ou égale à la valeur que la fonction prend pour tout autre système de valeurs des variables indépendantes appartenant au même domaine en question. De même, il existe dans ce domaine un système de valeurs des variables indépendantes tel que la valeur de la fonction qui y répond soit supérieure ou égale à la valeur que prend la fonction pour tout autre système de valeurs des variables indépendantes appartenant au même domaine (théorème de Weierstrass). Par conséquent, il y a une valeur particulière de YZ inférieure ou égale à toutes les autres valeurs de YZ. Cette valeur particulière est différente de zéro. Il y a donc un nombre positif β tel que l'on a constamment

$$\mathrm{YZ} > \beta.$$

Faisons maintenant tendre XC vers zéro. On a

$$\lim \sphericalangle \mathrm{XDC} = 0 \quad (\S\ 161),$$
$$\lim \sphericalangle \mathrm{EXD} = \sphericalangle \mathrm{ECD} \quad (\S\ 165),$$
$$\lim \sphericalangle \mathrm{DXC} = \lim (\pi - \sphericalangle \mathrm{EXD}) = \pi - \sphericalangle \mathrm{ECD}.$$

L'excès du triangle XDC tend donc vers zéro. Prenons X assez près de C pour que l'excès du triangle XDC soit moindre en valeur absolue que α, et laissons X fixe dans cette position.

A cette position de X répondra d'après ce qui précède un nombre fixe β tel que

$$\mathrm{YZ} > \beta,$$

Y étant un point quelconque de (DX) ou de (XC) et Z un point quelconque de (AB).

Considérons maintenant un triangle quelconque $A'B'C'$ dont un côté $(A'B')$ a une mesure inférieure à AB et un autre côté $(A'C')$ une mesure inférieure à β. Il y a un point A_1 entre A et B tel que $A'B' = A_1B$. Soit b la semi-droite issue de A_1, et située dans le plan ECD du même côté de CD que E, telle que $\sphericalangle C'A'B' = (b, | A_1B)$. b coupe (DX) ou (XC). Supposons par exemple que b coupe (DX) en C_1. On a

$$C_1A_1 > \beta > C'A'.$$

Il y a un point C_2 entre A_1 et C_1 tel que $A_1C_2 = A'C'$. L'excès du triangle $A'B'C'$ est égal à celui de A_1BC_2. DC_2 coupe (CX) en C_3 et d'après le § 319 on a

$$|\text{excès de } A_1BC_2| < |\text{excès de } A_1DC_2| < |\text{excès de } CDC_2|$$
$$< |\text{excès de } CDC_3| < |\text{excès de } CDX|.$$

On a donc

$$|\text{excès de } A'B'C'| < \alpha.$$

C. q. f. d.

325. Dans le paragraphe précédent nous sommes arrivés à la connaissance d'un fait remarquable ; il convient de s'y arrêter un moment pour se rendre compte de sa portée.

Soient a, b et c trois semi-droites fixes issues d'un même point O et non situées dans un même plan. Soient A, B et C trois points distincts de O situés respectivement sur ces trois semi-droites. La figure formée par les points O, A, B et C est un *tétraèdre*. On définit la notion de point *intérieur* à un tétraèdre comme on a défini celle de point intérieur à un triangle. On voit aisément que si X et Y sont deux points intérieurs au tétraèdre donné, on a

$$XY < OA + OB + OC + AB + BC + CA.$$

Si OA, OB et OC tendent vers zéro, AB, BC et CA tendent aussi vers zéro. On peut donc prendre OA, OB et OC assez petits pour que l'on ait toujours

$$XY < \alpha,$$

α étant un nombre positif arbitrairement petit et X et Y étant deux points quelconques intérieurs à $OABC$.

D'après le § 324 on peut donc prendre A, B et C assez près de O pour que les excès de tous les triangles dont les sommets sont intérieurs au tétraèdre OABC soient inférieurs en valeur absolue à un nombre positif arbitrairement petit donné à l'avance. En d'autres mots, dans une région infiniment petite de l'espace la somme des mesures des angles d'un triangle diffère infiniment peu de π. Nous voyons ainsi apparaître pour la première fois une règle générale que nous trouverons confirmée dans la suite, à savoir que les propriétés des figures d'une région infiniment petite de l'espace dans l'hypothèse de l'angle obtus ou aigu diffèrent infiniment peu des propriétés que possèdent les figures dans l'hypothèse de l'angle droit. Ce principe montre que l'hypothèse de l'angle droit occupe parmi les trois hypothèses possibles une place toute spéciale. Les géométries répondant aux hypothèses de l'angle obtus et aigu se rapprochent notamment de plus en plus de la géométrie qui répond à l'hypothèse de l'angle droit à mesure qu'on se confine à des régions de l'espace plus petites.

326. Théorème. *Étant donné un segment fixe* (AB), *à chaque nombre positif* α *arbitrairement petit on peut faire correspondre un nombre positif* β *suffisamment petit pour que dans tout triangle où les mesures de deux côtés sont égales à* AB *et où la mesure du troisième côté est inférieure à* β, *les mesures des angles opposés aux deux premiers côtés diffèrent chacune de* $\frac{\pi}{2}$ *d'une quantité inférieure à* α *en valeur absolue.*

Démonstration. Considérons un demi-plan fixe limité à la droite AB. Soit C un point de ce demi-plan tel que AC = AB. On a

$$\lim_{BC \gtrless 0} \sphericalangle BAC = 0 \ (\S\ 163),$$

$$\lim_{BC \gtrless 0} (\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB) = \pi \ (\S\ 324),$$

$$\lim_{BC \gtrless 0} \sphericalangle ABC = \lim_{BC \gtrless 0} \sphericalangle ACB = \frac{\pi}{2}.$$

Si d'autre part dans un triangle dont deux côtés sont congruents à (AB) le troisième côté a une mesure suffi-

samment petite, on pourra trouver un point C dans le demi-plan fixe limité à AB tel que (BC) soit congruent à ce troisième côté et tel que $AC = AB$ (§ 163).

Cela étant, le théorème s'établit sans la moindre difficulté.

327. Théorème. *Supposons donnés un segment* (A_1L) *et une semi-droite s issue de* A_1 *et n'appartenant pas à la droite* A_1L. *A chaque nombre positif* α *arbitrairement petit on peut faire correspondre deux nombres positifs* β_1 *et* β_2 *suffisamment petits pour que dans tout triangle* ABC *où l'on a*

$$AB < A_1L,\ \sphericalangle ABC < \beta_1,\ |\sphericalangle CAB - (s, |A_1L)| < \beta_2,$$

on ait aussi

$$\frac{AC}{AB} < \alpha,\ \frac{AC}{BC} < \alpha.$$

Démonstration.

Lemme 1. Soit D un point quelconque de s autre que A_1. Quand un point variable B_1 se déplace continûment sur LA_1 de L en A_1, $\sphericalangle DB_1A_1$ varie continûment de $\sphericalangle DLA_1$ à $\pi - \sphericalangle DA_1L$, en restant toujours positif. D'après le théorème de Weierstrass (§ 324) on peut donc trouver un nombre positif l tel que l'on a toujours

$$\sphericalangle DB_1A_1 > l$$

quand B_1 est un point de (A_1L). Soient maintenant θ et x deux nombres positifs quelconques satisfaisant à

$$\theta < l,\ x < A_1L.$$

On pourra trouver sur (A_1L) un point B_1 tel que $A_1B_1 = x$. On aura pour ce point B_1

$$\sphericalangle DB_1A_1 > l \geqq \theta.$$

Il y aura une semi-droite issue de B_1 et intérieure à $\sphericalangle DB_1A_1$ faisant avec $|B_1A_1$ un angle dont la mesure est θ. Cette semi-droite passe par un point C_1 entre D et A_1. Comme le point D peut être pris arbitrairement près de A_1, on peut faire correspondre à tout nombre positif ε arbitrairement petit un nombre positif η suffisamment

petit tel que l'on ait

$$A_1C_1 < \varepsilon$$

dès que

$$\sphericalangle C_1B_1A_1 < \eta, \; A_1B_1 \leqslant A_1L.$$

En particulier, A_1C_1 tend vers zéro lorsque $\sphericalangle C_1B_1A_1$ et A_1B_1 tendent vers zéro. Je dis que

$$\lim_{\substack{A_1B_1 \gtrless 0 \\ \sphericalangle A_1B_1C_1 \gtrless 0}} \frac{A_1C_1}{A_1B_1} = 0, \quad \lim_{\substack{A_1B_1 \gtrless 0 \\ \sphericalangle A_1B_1C_1 \gtrless 0}} \frac{A_1C_1}{B_1C_1} = 0.$$

En effet.

Si A_1B_1 est assez petit, on peut abaisser la perpendiculaire B_1P sur s (§ 173). Supposons d'abord $(s, | A_1L) \neq \frac{\pi}{2}$. Si $(s, | A_1L)$ est aigu, P sera toujours sur s, et si cet angle est obtus, P sera toujours sur la semi-droite opposée à s, pourvu que A_1B_1 soit assez petit. On a d'après le § 172

$$\lim A_1P = 0.$$

Si A_1B_1 est assez petit, il y aura sur le support de s un point B'_1 tel que A_1 est entre P et B'_1 et que $A_1B'_1 = A_1B_1$. On a (§ 324)

$$\lim \sphericalangle A_1B_1P = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle PA_1B_1,$$

$$\lim \sphericalangle A_1B_1B'_1 = \lim \tfrac{1}{2}(\sphericalangle A_1B_1B'_1 + \sphericalangle B_1B'_1A_1)$$
$$= \tfrac{1}{2}(\pi - \sphericalangle B_1A_1B'_1).$$

Par conséquent, $\sphericalangle A_1B_1C_1$ restera inférieur à $\sphericalangle A_1B_1P$ et à $\sphericalangle A_1B_1B'_1$ pour des valeurs suffisamment petites de A_1B_1 et de $\sphericalangle A_1B_1C_1$. Si $(s, | A_1L)$ est aigu, C_1 restera à partir d'un certain instant entre A_1 et P. Si $(s, | A_1L)$ est obtus, C_1 restera entre A_1 et B'_1.

Considérons la semi-droite issue de A_1 située dans le plan déterminé par s et L du côté du support de s opposé à celui de L et faisant avec s un angle congruent à $(s, | A_1L)$. Si A_1B_1 est assez petit, il y aura toujours sur cette semi-droite un point B''_1 tel que $A_1B_1 = A_1B''_1$. On aura alors $B''_1P = B_1P$, et B''_1 sera sur la droite B_1P. Quand A_1B_1 et $\sphericalangle A_1B_1C_1$ tendent vers zéro, $A_1B'_1$ et A_1P tendent vers zéro. On pourra à partir d'un certain instant toujours trouver sur le support de s un point F tel que P est entre F et B'_1 et que $PF = PB'_1$.

Donnons nous maintenant un nombre positif α arbitrairement petit. Il y a un nombre entier et positif n tel que

$$\frac{1}{n} < \alpha.$$

Comme $\sphericalangle A_1B_1B'_1$ tend vers $\frac{1}{2}(\pi - \sphericalangle B_1A_1B'_1)$, quantité différente de zéro, on peut prendre A_1B_1 et $\sphericalangle A_1B_1C_1$ assez petits pour que l'on ait

$$\sphericalangle A_1B_1C_1 < \frac{1}{n} \sphericalangle A_1B_1B'_1.$$

Pour des valeurs suffisamment petites de A_1B_1 et de $\sphericalangle A_1B_1C_1$, il y aura donc entre A_1 et B'_1 une suite de points $E_1, E_2, \ldots, E_n$ tels que E_2 est entre E_1 et B'_1, E_3 entre E_2 et B'_1, ..., E_n entre E_{n-1} et B'_1 et tels que

$$\sphericalangle A_1B_1C_1 = \sphericalangle A_1B_1E_1 = \sphericalangle E_1B_1E_2 = \cdots = \sphericalangle E_{n-1}B_1E_n.$$

C_1 est situé entre A_1 et P ou bien C_1 coïncide avec E_1. Nous allons montrer que dans le premier cas C_1A_1, A_1E_1, $E_1E_2, \ldots, E_{n-1}E_n$ et dans le second cas $A_1E_1, E_1E_2, \cdots, E_{n-1}E_n$ vont en croissant. Montrons pour commencer que $E_1E_2 > A_1E_1$. On a (§ 175)

$$B_1E_2 > B_1A_1.$$

Il y a un point G entre B_1 et E_2 tel que $B_1G = B_1A_1$. On a

$$\sphericalangle B_1GE_1 = \sphericalangle B_1A_1E_1,\ A_1E_1 = GE_1,\ \sphericalangle E_1GE_2 = \sphericalangle B_1A_1P.$$

Or, on a (§ 176)

$$\sphericalangle B_1A_1P > \sphericalangle B_1E_2E_1.$$

On a donc

$$\sphericalangle E_1GE_2 > \sphericalangle GE_2E_1,$$
$$E_1E_2 > E_1G = A_1E_1.$$

On montre exactement de la même manière que chaque segment de la suite de segments que nous considérons autre que le premier a une mesure supérieure à celle du segment précédent. On a

$$A_1B'_1 > A_1E_n = A_1E_1 + E_1E_2 + \cdots + E_{n-1}E_n.$$

Le second membre de cette inégalité se compose d'une

somme de n nombres positifs. Chacun d'eux est supérieur ou égal à A_1C_1. On a donc

$$A_1B'_1 > n\, A_1C_1,$$
$$A_1B_1 > n\, A_1C_1,$$
$$\frac{A_1C_1}{A_1B_1} < \frac{1}{n} < \alpha.$$

Cette inégalité a lieu sans cesse dès que A_1B_1 et $\sphericalangle A_1B_1C_1$ en tendant vers zéro sont devenus assez petits. $\frac{A_1C_1}{A_1B_1}$ tend donc vers zéro. Si $(s, | A_1L) = \frac{\pi}{2}$, le raisonnement précédent reste valable moyennant de légères modifications sans difficulté.

Supposons α inférieur à 1. Dès que

$$\frac{A_1C_1}{A_1B_1} < \alpha,$$

on a

$$A_1B_1 > A_1C_1, \quad B_1C_1 > A_1B_1 - A_1C_1,$$
$$\frac{A_1C_1}{B_1C_1} < \frac{A_1C_1}{A_1B_1 - A_1C_1} = \frac{1}{\frac{A_1B_1}{A_1C_1} - 1} < \frac{1}{\frac{1}{\alpha} - 1} = \frac{\alpha}{1-\alpha},$$

En prenant α suffisamment petit, on peut rendre $\frac{\alpha}{1-\alpha}$ inférieur à un nombre positif arbitrairement petit. $\frac{A_1C_1}{B_1C_1}$ tend donc aussi vers zéro, et le premier lemme est complètement établi.

Lemme 2. Soit α un nombre positif arbitrairement petit. Je dis qu'il existe un nombre positif β_1 suffisamment petit pour que l'on ait

$$\frac{A_1C_1}{A_1B_1} < \alpha, \quad \frac{A_1C_1}{B_1C_1} < \alpha$$

dès que C_1 et B_1 sont deux points distincts de A_1 appartenant respectivement à s et à $| A_1L$ pour lesquels on a

$$A_1B_1 < A_1L, \sphericalangle A_1B_1C_1 < \beta_1.$$

En effet.

Il existe un nombre positif α' satisfaisant aux inégalités

$$\alpha' < 1, \alpha' < \alpha, \frac{\alpha'}{1-\alpha'} < \alpha.$$

D'après le premier lemme, il existe deux nombres positifs β et β'_1 suffisamment petits pour qu'il y ait entre A_1 et L un point D tel que $A_1D = \beta$ et pour que l'on ait

$$\frac{A_1C_1}{A_1B_1} < \alpha'$$

dès que

$$A_1B_1 < \beta, \quad \measuredangle A_1B_1C_1 < \beta'_1.$$

Il y a un point E sur s tel que

$$\frac{A_1E}{A_1D} < \alpha'.$$

D'après les raisonnements faits pour établir le premier lemme, il y a un nombre positif β''_1 assez petit pour que C_1 soit entre A_1 et E dès que B_1 est entre A_1 et L et que

$$\measuredangle A_1B_1C_1 < \beta''_1.$$

Soit β_1 le plus petit des deux nombres β'_1 et β''_1. Prenons maintenant

$$A_1B_1 < A_1L, \quad \measuredangle A_1B_1C_1 < \beta_1.$$

B_1 sera alors entre A_1 et L, et l'on aura

$$\measuredangle A_1B_1C_1 < \beta''_1.$$

C_1 sera entre A_1 et E. Si B_1 est sur (DL), on a

$$\frac{A_1C_1}{A_1B_1} < \frac{A_1E}{A_1D} < \alpha'.$$

Supposons B_1 entre A_1 et D. Alors on a

$$A_1B_1 < \beta.$$

On a aussi

$$\measuredangle A_1B_1C_1 < \beta'_1.$$

On a donc encore

$$\frac{A_1C_1}{A_1B_1} < \alpha'.$$

D'après le calcul fait pour établir le premier lemme, on a

$$\frac{A_1C_1}{B_1C_1} < \frac{\alpha'}{1-\alpha'}.$$

On a donc toujours

$$\frac{A_1C_1}{A_1B_1} < \alpha, \quad \frac{A_1C_1}{B_1C_1} < \alpha.$$

Le deuxième lemme est donc établi.

Démonstration du théorème. Soit D un point fixe de s autre que A_1 et soient D_1 et D_2 deux points fixes de la droite LD, D_1 étant entre L et D, D entre L et D_2. Nous supposons de plus les points D, D_1 et D_2 choisis de telle façon qu'il existe un segment (MN) ayant pour mesure $A_1D + D_1D_2$.

Désignons par β_1 et β_2 deux nombres que nous assujetissons tout d'abord à la seule condition d'être positifs. Nous allons dans la suite ajouter successivement une série d'autres conditions à cette première condition, en montrant la possibilité de satisfaire à chaque nouvelle condition et en ayant soin que les conditions soient de telle nature qu'elles restent toujours remplies si l'on remplace β_1 et β_2 chacun par un nombre positif plus petit.

Examinons tous les triangles ABC où l'on a

$$AB < A_1L, \quad \sphericalangle ABC < \beta_1, \quad |\sphericalangle CAB - (s, | A_1L)| < \beta_2.$$

Il existe un nombre positif l tel que l'on a

$$\sphericalangle D_2XA_1 > l$$

pour tout point X de (A_1L) (voir lemme 1). Prenons β_1 inférieur à l et prenons β_2 assez petit pour que l'on ait

$$\sphericalangle D_2A_1L > \sphericalangle CAB > \sphericalangle D_1A_1L.$$

Il y aura un point B_1 situé entre A_1 et L tel que $A_1B_1 = AB$. On aura

$$\sphericalangle D_2B_1A_1 > l > \beta_1 > \sphericalangle ABC.$$

Il y aura donc une semi-droite a_1 issue de B_1 et intérieure à $\sphericalangle D_2B_1A_1$ telle que $(| B_1A_1, a_1) = \sphericalangle ABC$. D_2B_1 coupe (D_1A_1) en un point E situé entre D_2 et B_1. a_1 coupe (D_2A_1) en un point G et (EA_1) en un point F. F est entre G et B_1. Il y a une semi-droite b_1 issue de A_1 et intérieure à $\sphericalangle D_1A_1D_2$ telle que $(b_1, | A_1B_1) = \sphericalangle CAB$. b_1 coupe (GF) en un point C_1 et (D_2D_1) en un point H. C_1 est entre

A_1 et H. s coupe (FG) en un point C_2. C_2 est entre A_1 et D. Les côtés et les angles du triangle $A_1B_1C_1$ sont congruents chacun à chacun aux côtés et aux angles du triangle ABC et l'on a

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}, \quad \frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1}.$$

Si l'on prend β_1 assez petit, A_1C_2 sera inférieur à un même nombre positif donné à l'avance pour tous les triangles ABC considérés (lemme 1). Si l'on prend β_1 assez petit, $|\sphericalangle B_1C_2A_1 - (\pi - \sphericalangle B_1A_1D)|$ sera aussi inférieur à un même nombre positif donné à l'avance pour tous les triangles ABC considérés (§ 324), et par conséquent on peut prendre β_1 assez petit pour que $|\sphericalangle C_1C_2A_1 - \sphericalangle B_1A_1D|$ ou $|\sphericalangle C_1C_2A_1 - (\pi - \sphericalangle B_1A_1D)|$, suivant la position de C_1, soit toujours inférieur à un nombre positif donné à l'avance. On peut prendre β_2 assez petit pour que $\sphericalangle C_1A_1C_2$ reste inférieur à un nombre positif donné à l'avance. On a

$$A_1C_1 < A_1H < A_1D + DH < A_1D + D_1D_2 = MN.$$

Il y a donc un segment fixe constamment supérieur à A_1C_1. On peut donc prendre β_1 et β_2 assez petits pour que la valeur absolue de l'excès du triangle $C_1A_1C_2$ reste constamment inférieure à un nombre positif donné à l'avance (§ 324). D'après ce qui précède, on peut donc prendre β_1 et β_2 assez petits pour que $|\sphericalangle C_2C_1A_1 - (\pi - \sphericalangle B_1A_1D)|$ ou $|\sphericalangle C_2C_1A_1 - \sphericalangle B_1A_1D)|$, suivant la position de C_1, soit constamment inférieur à un nombre positif donné à l'avance. $\pi - \sphericalangle B_1A_1D$ et $\sphericalangle B_1A_1D$ sont différents de zéro. On peut donc prendre β_1 et β_2 assez petits pour que $\sphericalangle C_2C_1A_1$ soit constamment supérieur à $\sphericalangle C_1A_1C_2$. Prenons désormais β_1 et β_2 assez petits pour que cette condition soit remplie. On a

$$C_2A_1 > C_2C_1,$$
$$C_1A_1 < C_2C_1 + C_2A_1 < 2\,C_2A_1.$$

Donnons-nous maintenant un nombre positif α arbitrairement petit. Il y a un nombre positif α' satisfaisant

aux inégalités

$$\alpha' < 1, \quad \alpha' < \alpha, \quad \frac{\alpha'}{1-\alpha'} < \alpha.$$

Prenons β_1 assez petit pour que l'on ait constamment

$$\frac{A_1C_2}{A_1B_1} < \frac{\alpha'}{2} \quad \text{(lemme 2)}.$$

On aura alors

$$\frac{A_1C_1}{A_1B_1} < 2\frac{C_2A_1}{A_1B_1} < \alpha',$$

$$\frac{A_1C_1}{B_1C_1} < \frac{\alpha'}{1-\alpha'},$$

$$\frac{A_1C_1}{A_1B_1} < \alpha, \quad \frac{A_1C_1}{B_1C_1} < \alpha,$$

$$\frac{AC}{AB} < \alpha, \quad \frac{AC}{BC} < \alpha.$$

Ces deux dernières inégalités ont lieu dès que

$$AB < A_1L, \quad \sphericalangle ABC < \beta_1, \quad |\sphericalangle CAB - (s, | A_1L)| < \beta_2.$$

328. Théorème. *Supposons donnés un point* A, *deux droites a et b perpendiculaires entre elles passant par* A *et un point* A′ *de a distinct de* A. *On peut trouver sur b d'un côté donné de* A *un point* L *tel que sur la perpendiculaire élevée à b en un point quelconque* B *du segment* (AL) *dans le plan de a et de b il existe toujours un point* B′ *situé du même côté de b que* A′ *et déterminant avec* B *un segment congruent à* (AA′). *Si l'on suppose de plus que la perpendiculaire élevée à b en un point autre que* A *dans le plan de a et de b ne coupe pas* (AA′), *la figure* ABB′A′ *sera toujours un quadrilatère convexe.*

Démonstration. Soit A″ un point de *a* tel que A′ soit entre A et A″. Soit *b*″ une droite passant par A″ située dans le plan de *a* et de *b* et distincte de *a*.

Soit B un point variable de *b* situé toujours du côté donné de A. Elevons en B dans le plan de *a* et de *b* la perpendiculaire à *b*. Si B est assez près de A, cette perpendiculaire coupera *b*″ (§ 169). Soit B″ le point d'intersection.

Si AB tend vers zéro, A''B'' tend vers zéro (§ 169) et BB'' tend vers AA''. Il y a donc une position particulière L de B telle que, si AB < AL, le point B'' est situé du même côté de *b* que A'' et BB'' est supérieur à AA'. Si donc B est entre A et L, il y aura sur (BB'') un point B' tel que BB' = AA' et le point B' sera situé du même côté de *b* que A'.

Si l'on suppose de plus que la droite BB' ne passe par aucun point de (AA'), la droite AA' ne passe par aucun point de (BB'), car si elle passait par un point O de (BB'), on aurait AO = BO, AO < AA', et O serait sur (AA'), ce qui est exclu par hypothèse. ABB'A' est donc dans ce cas toujours un quadrilatère convexe (§ 62).

329. Théorème. *Soit* ABB'A' *un quadrilatère birectangle isoscèle, les angles droits étant en* A *et* B. *Si les points* A *et* A' *ainsi que la semi-droite* | AB *restent fixes tandis que* AB *tend vers zéro, la mesure de* (A'B') *tendra vers zéro et les mesures des angles opposés aux angles droits tendront vers* $\frac{\pi}{2}$.

Démonstration. Dans l'énoncé on suppose qu'il existe un quadrilatère birectangle isoscèle ABB'A' répondant à une position particulière de B. La perpendiculaire élevée à AB en un point autre que A dans le plan ABA' ne coupe donc pas le segment (AA').

Si l'on donne à B une position quelconque sur la perpendiculaire élevée en A à AA' dans le plan de la figure, il n'est pas certain que sur la perpendiculaire élevée en B à AB dans le plan ABA' il y aura un point B' situé du même côté de AB que A' et déterminant avec B un segment congruent à (AA'). Nous ne sommes donc pas sûrs que, le point **B** étant donné d'avance, la construction du quadrilatère birectangle isoscèle ABB'A' sera toujours possible. Mais, d'après le § 328, nous sommes sûrs que cette construction sera toujours possible dès que B est assez rapproché de A. Le problème de savoir quelles sont les propriétés du quadrilatère birectangle isoscèle ABB'A' pour les valeurs infiniment petites de AB a donc toujours un sens.

Soit maintenant *a* une droite fixe passant par A′, située dans le plan A′AB et distincte de A′A. Si B est assez près de A, BB′ coupera *a* (§ 169). Soit B″ le point d'intersection. Si AB tend vers zéro, on a

$$\lim A'B'' = 0 \quad (\S\ 169),$$
$$\lim BB'' = AA' = BB',$$
$$\lim B''B' = 0,$$
$$\lim A'B' = 0,$$
$$\lim \sphericalangle AB'B = 0 \quad (\S\ 164),$$
$$\lim (\sphericalangle AB'B + \sphericalangle B'AB + \sphericalangle ABB') = \pi \quad (\S\ 324),$$
$$\lim \sphericalangle B'AB = \frac{\pi}{2},$$
$$\lim \sphericalangle A'AB' = 0,$$
$$\lim (\sphericalangle A'AB' + \sphericalangle AA'B' + \sphericalangle A'B'A) = \pi \quad (\S\ 324),$$
$$\lim (\sphericalangle AA'B' + \sphericalangle A'B'A) = \pi,$$
$$\lim (\sphericalangle AA'B' + \sphericalangle A'B'A + \sphericalangle AB'B) = \pi,$$
$$\lim (\sphericalangle AA'B' + \sphericalangle A'B'B) = \pi,$$
$$\lim \sphericalangle AA'B' = \lim \sphericalangle A'B'B = \frac{\pi}{2} \quad (\S\ 65).$$

C. q. f. d.

CHAPITRE XIII.

Paramètre de la géométrie générale.

330. Théorème. *Dans un quadrilatère trirectangle, un côté déterminé par deux sommets consécutifs où les angles sont droits est toujours supérieur ou toujours inférieur au côté opposé, suivant qu'on se place dans l'hypothèse de l'angle obtus ou dans l'hypothèse de l'angle aigu.*

Démonstration. Soit ABCD un quadrilatère trirectangle, les angles droits étant en A, en B et en C.

Admettons l'hypothèse de l'angle obtus. L'angle ∢ ADC est alors obtus. Si l'on avait AB = DC, on aurait ∢ ADC = ∢ DAB = $\frac{\pi}{2}$, ce qui est impossible. Si l'on avait DC > AB, il y aurait entre D et C un point D′ tel que CD′ = BA. BCD′A serait alors un quadrilatère birectangle isoscèle, ∢ D′AB serait obtus; cet angle étant manifestement aigu, on n'a pas non plus DC > AB. On a donc DC < AB. On a de même DA < CB.

Admettons ensuite l'hypothèse de l'angle aigu. L'angle ∢ ADC est aigu. On voit comme tantôt qu'on n'a pas AB = DC. Si l'on avait AB > DC, il y aurait un point B′ entre A et B tel que BB′ = CD. ∢ DB′B serait aigu, ∢ DB′A serait obtus et la somme des mesures des angles du triangle DAB′ serait supérieure à π, ce qui est impossible. On a donc AB < DC; de même on a BC < AD.

C. q. f. d.

331. Théorème. *Dans un quadrilatère birectangle isoscèle le côté déterminé par les sommets des angles droits est toujours supérieur ou toujours inférieur au côté opposé, suivant qu'on se place dans l'hypothèse de l'angle obtus ou dans l'hypothèse de l'angle aigu.*

Démonstration. On établit sans peine ce théorème en partageant le quadrilatère birectangle isoscèle donné en deux quadrilatères trirectangles.

332. Théorème. *Soit* ABB′A′ *un quadrilatère trirectangle, les angles droits étant en* A, *en* B *et en* A′. *Si* AA′ *décroît tandis que* AB *reste constant,* A′B′ *croît ou décroît suivant qu'on se place dans l'hypothèse de l'angle obtus ou dans l'hypothèse de l'angle aigu.*

Démonstration. Soit A″ un point situé entre A et A′. La perpendiculaire élevée en A″ à AA′ dans le plan AA′B coupe (BB′) en B″. En raisonnant à peu près comme au § 330 on montre qu'on a $A'B' < A''B''$ ou $A'B' > A''B''$ suivant qu'on admet l'hypothèse de l'angle obtus ou l'hypothèse de l'angle aigu.

333. Théorème. *Soit* ABB′A′ *un quadrilatère birectangle isoscèle, les angles droits étant en* A *et en* B. *Si* AA′ *décroît tandis que* AB *reste constant,* A′B′ *croît ou décroît suivant qu'on se place dans l'hypothèse de l'angle obtus ou dans l'hypothèse de l'angle aigu.*

Démonstration. On établit sans peine ce théorème en partageant le quadrilatère birectangle isoscèle donné en deux quadrilatères trirectangles.

334. Théorème. *Supposons donné un quadrilatère trirectangle* ABB′A′, *les angles droits étant en* A, *en* B *et en* A′. *Supposons donnés sur* (AB) *trois points* C, C_1 *et* C_2, C_1 *étant entre* C *et* C_2, A *étant sur* $|C_1C$ *et* B *sur* $|C_1C_2$, *et les segments* (CC_1) *et* (C_1C_2) *étant congruents entre eux. Soient respectivement* C′, C'_1 *et* C'_2 *les points d'intersection avec* A′B′ *des perpendiculaires élevées en* C, *en* C_1 *et en* C_2 *à* AB *dans le plan* A′AB. *Le segment* $(C'C'_1)$ *est toujours inférieur au segment* $(C'_1C'_2)$, *sauf si l'on admet l'hypothèse de l'angle droit ; dans ce dernier cas,* $C'C'_1 = C'_1C'_2$.

Démonstration. Admettons d'abord l'hypothèse de l'angle aigu. On a (§ 332)

$$C_2C'_2 > CC'.$$

Il y a un point D_2 entre C_2 et C'_2 tel que $C_2D_2 = CC'$. La droite $C'D_2$ coupe $C_1C'_1$ en un point D_1 situé entre C′ et D_2 et entre C_1 et C'_1. C_1D_1 est perpendiculaire à $C'D_2$ et l'on a

$$C'D_1 = D_1D_2, \quad \measuredangle D_1C'C = \measuredangle D_1D_2C_2 \text{ (§ 65)}.$$

Cela étant, on voit immédiatement qu'on a

$$C'C'_1 = C'_1D_2, \quad \measuredangle C'_1C'D_2 = \measuredangle C'_1D_2C',$$
$$\measuredangle C'_1C'C = \measuredangle C'_1D_2C_2, \quad \measuredangle A'C'C = C'_1D_2C'_2.$$

On a ensuite

$$\left(\sphericalangle A'C'C - \frac{\pi}{2}\right) + (\sphericalangle CC'C'_2 + C_2C'_2C' - \pi)$$
$$= \sphericalangle C'_1C'_2D_2 - \frac{\pi}{2} (\S\ 321),$$

$$\sphericalangle A'C'C - \frac{\pi}{2} > \sphericalangle C'_1C'_2D_2 - \frac{\pi}{2},$$
$$\sphericalangle A'C'C > \sphericalangle C'_1C'_2D_2,$$
$$\sphericalangle C'_1D_2C'_2 > \sphericalangle C'_1C'_2D_2,$$
$$C'_1C'_2 > C'_1D_2,$$
$$C'_1C'_2 > C'C'_1.$$

C. q. f. d.

Admettons en second lieu l'hypothèse de l'angle obtus. On a alors (§ 332)

$$C_2C'_2 < CC'.$$

Il y a un point D entre C et C' tel que $CD = C_2C'_2$. DC'_2 coupe $C_1C'_1$ en D_1. On trouve successivement, en raisonnant comme dans le cas précédent,

$$DC'_1 = C'_1C'_2,$$
$$\sphericalangle C'_1DC' = \sphericalangle C_2C'_2B',$$
$$\left(\sphericalangle A'C'C - \frac{\pi}{2}\right) + (\sphericalangle CC'C'_2 + \sphericalangle C'C'_2C_2 - \pi)$$
$$= \sphericalangle A'C'_2C_2 - \frac{\pi}{2},$$

$$\sphericalangle A'C'C - \frac{\pi}{2} < \sphericalangle A'C'_2C_2 - \frac{\pi}{2},$$
$$\sphericalangle A'C'C < \sphericalangle A'C'_2C_2,$$
$$\sphericalangle DC'C'_1 > \sphericalangle C_2C'_2B',$$
$$\sphericalangle DC'C'_1 > \sphericalangle C'_1DC',$$
$$DC'_1 > C'C'_1,$$
$$C'_1C'_2 > C'C'_1.$$

C. q. f. d.

Si enfin on admet l'hypothèse de l'angle droit, on voit aisément au moyen des §§ 323 et 198 qu'on a $C'C'_1 = C'_1C'_2$.

335. Théorème. *Soit* ABB'A' *un quadrilatère birectangle isoscèle, les angles droits étant en* A *et en* B. *Si les points* A *et* A' *ainsi que la semi-droite* |AB *restent fixes, tandis que* AB *tend*

vers zéro, le rapport du segment (A′B′) *au segment* (AB) *tendra vers une limite déterminée finie.*

Démonstration. Tout d'abord on voit immédiatement que, si l'on admet l'hypothèse de l'angle droit, on a constamment

$$\frac{A'B'}{AB} = 1.$$

La limite de $\frac{A'B'}{AB}$ est donc aussi 1 et le théorème est vrai.

Plaçons-nous maintenant dans l'une quelconque des deux autres hypothèses. Soit p la semi-droite issue de A′, située dans le plan A′AB du même côté de AA′ que B et faisant avec | A′A un angle droit. Si B est assez près de A, BB′ coupera toujours p. Soit B″ le point d'intersection de BB′ avec p. A′ABB″ est un quadrilatère trirectangle.

Nous allons d'abord établir que $\frac{A'B''}{AB}$ décroît quand AB décroît. Considérons deux positions particulières quelconques de B, B_1 et B_2, et supposons B_2 situé entre A et B_1. Soient B''_1 et B''_2 les positions de B″ répondant respectivement à B_1 et à B_2. Il suffira de montrer qu'on a $\frac{A'B''_2}{AB_2} < \frac{A'B''_1}{AB_1}$. Soit n un nombre entier et positif. Divisons (AB_1) en n parties congruentes entre elles et soient $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ les points de division. Les perpendiculaires élevées en ces points de division à AB_1 dans le plan $A'AB_1$ coupent p respectivement en $C''_1, C''_2, \dots, C''_{n-1}$. On a

$$(1) \qquad A'C''_1 < C''_1C''_2 < \dots < C''_{n-1}B''_1 \text{ (§ 334)}.$$

Soient C_l et C_{l+1} deux points de division consécutifs sur le segment (AB_1). On a d'après (1)

$$lC''_lC''_{l+1} > A'C''_1 + C''_1C''_2 + \dots + C''_{l-1}C''_l,$$

$$lA'C''_1 + lC''_1C''_2 + \dots + lC''_{l-1}C''_l + lC''_lC''_{l+1}$$
$$> (l+1)A'C''_1 + (l+1)C''_1C''_2 + \dots + (l+1)C''_{l-1}C''_l,$$

$$lA'C''_{l+1} > (l+1)A'C''_l,$$

$$\frac{A'C''_{l+1}}{l+1} > \frac{A'C''_l}{l}, \qquad \frac{A'C''_{l+1}}{(l+1)AC_1} > \frac{A'C''_l}{lAC_1},$$

$$\frac{A'C''_{l+1}}{AC_{l+1}} > \frac{A'C''_l}{AC_l}.$$

On a donc

$$\frac{A'C''_1}{AC_1} < \frac{A'C''_2}{AC_2} < \dots < \frac{A'C''_{n-1}}{AC_{n-1}} < \frac{A'B''_1}{AB_1}.$$

Si donc m est un nombre entier et positif inférieur à n, on a

(2) $$\frac{A'C''_m}{AC_m} < \frac{A'B''_1}{AB_1}.$$

On peut maintenant trouver une suite indéfinie de fractions $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_k}{b_k}, \dots$ toutes inférieures à 1 et supérieures à $\frac{AB_2}{AB_1}$, allant en décroissant, et telles que

$$\lim_{k=+\infty} \frac{a_k}{b_k} = \frac{AB_2}{AB_1}.$$

Divisons (AB_1) en b_k parties congruentes entre elles et soit C_{a_k, b_k} le $a_k^{\text{ième}}$ point de division à partir de A. La perpendiculaire élevée en C_{a_k, b_k} à AB_1 dans le plan $A'AB_1$ coupe p en C''_{a_k, b_k}. On a

$$AC_{a_k, b_k} = \frac{a_k}{b_k} AB_1,$$

$$\lim_{k=+\infty} AC_{a_k, b_k} = \frac{AB_2}{AB_1} AB_1 = AB_2,$$

$$\lim_{k=+\infty} A'C''_{a_k, b_k} = A'B''_2 \text{ (§ 169)},$$

(3) $$\lim_{k=+\infty} \frac{A'C''_{a_k, b_k}}{AC_{a_k, b_k}} = \frac{A'B''_2}{AB_2}.$$

D'après (2), on a

(4) $$\frac{A'C''_{a_k, b_k}}{AC_{a_k, b_k}} < \frac{A'B''_1}{AB_1}.$$

En réduisant $\frac{a_k}{b_k}$ et $\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$ au même dénominateur, on trouve d'après (2)

$$\frac{A'C''_{a_k, b_k}}{AC_{a_k, b_k}} > \frac{A'C''_{a_{k+1}, b_{k+1}}}{AC_{a_{k+1}, b_{k+1}}}.$$

Lorsque k croît sans cesse, $\frac{A'C''_{a_k,b_k}}{AC_{a_k,b_k}}$ décroît donc constamment. On a donc, d'après (3) et (4),

$$\frac{A'B''_2}{AB_2} < \frac{A'B''_1}{AB_1}.$$

Par conséquent, $\frac{A'B''}{AB}$ décroît quand AB décroît.

Cela étant, il est sûr que

$$\lim_{AB \gtrless 0} \frac{A'B''}{AB}$$

existe. Comme $\frac{A'B''}{AB}$ est toujours positif, $\lim \frac{A'B''}{AB}$ sera fini. Posons

$$\lim_{AB \gtrless 0} \frac{A'B''}{AB} = r.$$

Lorsque AB tend vers zéro, nous avons

$$\lim \sphericalangle AA'B' = \frac{\pi}{2} \quad (§\ 329),$$

$$\lim A'B' = 0 \quad (§\ 329),$$

$$\lim \sphericalangle B'A'B'' = 0,$$

$$\lim \sphericalangle A'B'B = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim \sphericalangle A'B'B'' = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim \frac{B'B''}{A'B''} = 0 \quad (§\ 327),$$

$$A'B'' - B'B'' < A'B' < A'B'' + B'B'',$$

$$1 - \frac{B'B''}{A'B''} < \frac{A'B'}{A'B''} < 1 + \frac{B'B''}{A'B''},$$

$$\lim \frac{A'B'}{A'B''} = 1,$$

$$\lim \frac{A'B'}{AB} = \lim \frac{A'B'}{A'B''} \cdot \frac{A'B''}{AB} = 1 \times r = r.$$

Le théorème est donc établi.

336. Soit a un nombre positif tel qu'il existe un segment (AA′) jouissant des propriétés suivantes : le segment (AA′) a pour mesure a ; il existe une droite AB passant par A et perpendiculaire à AA′ telle que la perpendiculaire élevée à AB en un point autre que A dans le plan A′AB ne passe par aucun point du segment (AA′). Désignons par (a) l'ensemble de tous les nombres analogues à a.

On voit immédiatement qu'il existe certainement des nombres appartenant à l'ensemble (a). De plus, si x appartient à (a), tout nombre positif inférieur à x appartient à (a), et les nombres supérieurs à x assez rapprochés de x appartiennent aussi à (a). On voit aisément que si x appartient à (a), si (AA′) est un segment quelconque ayant pour mesure x et si AB est une perpendiculaire quelconque élevée en A à AA′, la perpendiculaire élevée à AB en un point autre que A dans le plan A′AB ne passe par aucun point du segment (AA′). Si x appartient à (a), on peut toujours construire un quadrilatère birectangle isoscèle A′ABB′ dans lequel les angles droits sont en A et en B et où (AA′) a pour mesure x (§ 328). On voit aisément que $\lim\limits_{AB \gtrless 0} \frac{A'B'}{AB}$ a la même valeur dans tous les quadrilatères birectangles isoscèles pareils.

Désignons par $\varphi(x)$ la fonction définie comme suit : pour $x = 0$, on a $\varphi(x) = 1$; si x appartient à (a), $\varphi(x)$ est la limite du rapport $\frac{A'B'}{AB}$ dans un quadrilatère birectangle isoscèle ABB′A′ où les angles droits sont en A et en B, où (AA′) a pour mesure x, où les points A et A′ et la semi-droite | AB sont fixes et où AB tend vers zero ; si x est différent de zéro et n'appartient pas à (a), la fonction $\varphi(x)$ n'a pas de valeur.

337. Théorème. *Pour* $x > 0$, *on a toujours* $\varphi(x) > 1$, $\varphi(x) = 1$ *ou* $0 < \varphi(x) < 1$, *suivant qu'on se place dans l'hypothèse de l'angle aigu, dans celle de l'angle droit ou dans celle de l'angle obtus. Dans l'hypothèse de l'angle aigu,* $\varphi(x)$ *n'est pas décroissant ; dans l'hypothèse de l'angle obtus,* $\varphi(x)$ *n'est pas croissant.*

Démonstration. Dans l'hypothèse de l'angle droit, on a toujours $\varphi(x) = 1$, d'après ce qui a été vu au § 335.

Plaçons-nous maintenant dans l'une quelconque des deux autres hypothèses. Soit $ABB'A'$ un quadrilatère birectangle isoscèle, les angles droits étant en A et en B. Supposons que AB soit assez petit pour que l'on puisse construire le quadrilatère birectangle isoscèle $A'ABB'$ répondant à toute nouvelle position de B plus rapprochée de A que la position donnée. Laissons maintenant B fixe.

Soient B_1 le milieu de (AB), B_2 le milieu de (AB_1), ..., B_n le milieu de (AB_{n-1}). Elevons en chacun des points $B_1, B_2, ..., B_n$ la perpendiculaire à AB dans le plan $A'AB$. Considérons sur chacune de ces perpendiculaires le point situé du même côté de AB que A' et déterminant avec le pied de la perpendiculaire un segment congruent à (AA'). Soient $B'_1, B'_2, ..., B'_n$ les points qui répondent ainsi respectivement à $B_1, B_2, ..., B_n$. Les figures $AB_1B'_1A'$, $AB_2B'_2A'$, ..., $AB_nB'_nA'$ sont des quadrilatères birectangles isoscèles. On a

$$\lim_{n=+\infty} AB_n = 0,$$

(1) $$\lim_{n=+\infty} \frac{A'B'_n}{AB_n} = \varphi(AA') \quad (\text{§ } 335).$$

Soit C le point d'intersection de $B_1B'_1$ avec $A'B'$. C est le milieu de $(A'B')$ et $B_1B'_1$ est perpendiculaire à $A'B'$. B'_1 ne peut coïncider avec C, puisque nous ne sommes pas placés dans l'hypothèse de l'angle droit. On a donc

$$A'B'_1 > A'C \quad (\text{§ } 175),$$

$$\frac{A'B'_1}{AB_1} > \frac{A'C}{AB_1} = \frac{A'B'}{AB}.$$

En raisonnant successivement sur les points $B_2, B_3, ..., B_n$ comme nous venons de le faire sur le point B_1, on trouve

(2) $$\frac{A'B'}{AB} < \frac{A'B'_1}{AB_1} < \frac{A'B'_2}{AB_2} < \dots < \frac{A'B'_n}{AB_n}.$$

Nous avons ainsi trouvé une quantité qui tend vers $\varphi(AA')$ en croissant. Au § 335 nous avons étudié une quantité variable qui tend vers $\varphi(AA')$ en décroissant.

Admettons maintenant l'hypothèse de l'angle aigu. Alors la fraction $\frac{A'B'_n}{AB_n}$ est toujours supérieure à 1 (§ 331). Comme cette fraction tend vers $\varphi(AA')$ en croissant, d'après (1) et (2), $\varphi(AA')$ est supérieur à 1.

Dans l'hypothèse de l'angle aigu, on peut encore affirmer que $\varphi(x)$ n'est pas décroissant d'après le § 333.

Dans l'hypothèse de l'angle obtus, on a $\varphi(x) < 1$ pour $x > 0$ parce qu'alors la quantité décroissant sans cesse dont $\varphi(x)$ est la limite est inférieure à 1 (§ 330); on a $\varphi(x) > 0$ parce que la quantité croissant sans cesse dont $\varphi(x)$ est la limite est positive.

Dans l'hypothèse de l'angle obtus $\varphi(x)$ ne peut jamais croître d'après le § 333.

338. Théorème. *La fonction* $\varphi(x)$ *du* § 336 *est continue pour toutes les valeurs non nulles de x pour lesquelles elle est définie. On a de plus* $\lim\limits_{x \gtrless 0} \varphi(x) = \varphi(0)$.

Démonstration. On constate immédiatement que le théorème est vrai dans l'hypothèse de l'angle droit.

Plaçons-nous dans l'une quelconque des deux autres hypothèses. Donnons à x une valeur non nulle quelconque pour laquelle la fonction $\varphi(x)$ est définie. Il existe un quadrilatère birectangle isoscèle ABB_1A_1 où les angles droits sont en A et en B et où $AA_1 = x$. Laissons les points A et A_1 et la semi-droite $|AB$ fixes. Il existe un point fixe A_3 sur $|AA_1$ au delà de A_1 tel que $\varphi(x)$ est défini pour $x = AA_3$ (§ 336). Soit A_2 un point fixe situé entre A et A_1. Désignons par p_1, p_2 et p_3 les perpendiculaires élevées respectivement en A_1, en A_2 et en A_3 à la droite AA_1 dans le plan A_1AB.

On peut trouver sur $|AB$ un point C assez rapproché de A pour que la perpendiculaire élevée en C à AB dans le plan A_1AB coupe p_3 (§ 169); soit C'_3 le point d'intersection. CC'_3 ne passe par aucun point de (AA_3). Nous pouvons de plus prendre C assez près de A pour que C'_3 soit du même côté de AB que A_3 et pour que AA_3 ne passe par aucun point de (CC'_3). Alors ACC'_3A_3 sera un quadrilatère convexe. Nous pouvons enfin prendre C assez

près de A pour que tout point B situé entre A et C ou coïncidant avec C jouisse de la propriété suivante : sur la perpendiculaire élevée en B à AB dans le plan A_1AB existe un point B_3 situé du même côté de AB que A_3 et déterminant avec B un segment congruent à (AA_3). Le point C étant choisi de manière à satisfaire à toutes ces conditions, nous laisserons ce point fixe pendant tout le reste de nos raisonnements.

p_1 et p_2 coupent CC'_3 respectivement en C'_1 et C'_2. C'_1 est entre C et C'_3, C'_2 est entre C et C'_1. Sur $|CC'_3$ existe un point C_3 tel que $CC_3 = AA_3$; entre C et C_3 existe un point C_1 tel que $CC_1 = AA_1$; entre C et C_1 existe un point C_2 tel que $CC_2 = AA_2$.

Désignons par B un point quelconque situé entre A et C et par A_4 un point quelconque situé entre A_2 et A_3. La perpendiculaire élevée en B à AC dans le plan A_3AC coupe $(A_3C'_3)$ en B'_3, $(A_1C'_1)$ en B'_1 et $(A_2C'_2)$ en B'_2. B'_1 est entre B et B'_3, B'_2 entre B et B'_1. Sur $|BB'_3$ il existe un point B_3 tel que $BB_3 = AA_3$. Entre B et B_3 existe un point B_1 tel que $BB_1 = AA_1$; entre B et B_1 existe un point B_2 tel que $BB_2 = AA_2$. La perpendiculaire élevée en A_4 à AA_3 dans le plan A_3AC coupe $(B'_2B'_3)$ en B'_4 et $(C'_2C'_3)$ en C'_4. Enfin, il existe un point B_4 situé entre B_2 et B_3 tel que $BB_4 = AA_4$ et un point C_4 situé entre C_2 et C_3 tel que $CC_4 = AA_4$.

Il s'agit de démontrer que

$$\lim_{AA_4 = AA_1} \varphi(AA_4) = \varphi(AA_1).$$

Nous allons maintenant distinguer quatre cas.

1°) On admet l'hypothèse de l'angle aigu et le point A_4 reste entre A_1 et A_3.

On a

$$\frac{A_4B'_4}{AB} > \varphi(AA_4) \text{ (§ 335, démonstration),}$$

$$\varphi(AA_4 \geqslant \varphi(AA_1) \text{ (§ 337),}$$

$$(1) \qquad \frac{A_4B'_4}{AB} > \varphi(AA_4) \geqslant \varphi(AA_1).$$

Si AB reste constant et si AA_4 diminue, $\frac{A_4B'_4}{AB}$ diminue (§332). Si AA_4 reste constant et si AB diminue, $\frac{A_4B'_4}{AB}$ diminue (§ 335, démonstration). Si donc AB et AA_4 diminuent tous les deux, $\frac{A_4B'_4}{AB}$ diminue et s'approche d'après (1) de $\varphi(AA_1)$.

Soit α un nombre positif arbitrairement petit. Prenons AB assez petit pour que

$$\left| \frac{A_1B'_1}{AB} - \varphi(AA_1) \right| < \frac{\alpha}{2}.$$

Laissons ensuite AB fixe et prenons AA_4 assez près de AA_1 pour que

$$\left| \frac{A_4B'_4}{AB} - \frac{A_1B'_1}{AB} \right| < \frac{\alpha}{2}.$$

Nous aurons alors pour les valeurs particulières de AB et de AA_4 choisies

$$(2) \qquad \left| \frac{A_4B'_4}{AB} - \varphi(AA_1) \right| < \alpha.$$

Si l'on donne à AB et à AA_4 des valeurs quelconques inférieures à ces valeurs particulières, $\frac{A_4B'_4}{AB}$ s'approchera de $\varphi(AA_1)$ et (2) aura encore lieu. On a donc

$$\lim_{\substack{AA_4 \gtrless AA_1 \\ AB \gtrless 0}} \frac{A_4B'_4}{AB} = \varphi(AA_1).$$

On a ensuite d'après (1)

$$\lim_{AA_4 \gtrless AA_1} \varphi(AA_4) = \varphi(AA_1).$$

2°) On admet l'hypothèse de l'angle aigu et le point A_4 reste entre A_2 et A_1.

Dans le cas actuel, nous n'allons plus laisser tendre AB vers zéro par valeurs positives quelconques. Nous allons supposer que AB tend vers zéro en parcourant successivement une infinité dénombrable de valeurs, notamment les valeurs $\frac{AC}{2}, \frac{AC}{2^2}, \frac{AC}{2^3}, \ldots$ A part l'hypothèse

que A_4 reste entre A_2 et A_1, nous n'apportons aucune restriction à la manière dont AA_4 tend vers AA_1.

Lorsque AA_4 reste constant et lorsque AB tend vers zéro de la manière convenue, $\frac{A_4B_4}{AB}$ croît sans cesse (§ 337, démonstration) et tend vers $\varphi(AA_4)$. On a d'après cela et d'après le § 337

$$\text{(I)} \qquad \frac{A_4B_4}{AB} < \varphi(AA_4) \leqslant \varphi(AA_1).$$

Si AB diminue, AA_4 restant constant, $\frac{A_4B_4}{AB}$ croît, d'après ce que nous venons de voir. Si AA_4 croît, AB restant constant, $\frac{A_4B_4}{AB}$ croît (§ 333). Si donc AB décroît et si AA_4 croît en même temps, $\frac{A_4B_4}{AB}$ croît et, d'après (I), s'approche de $\varphi(AA_1)$. Cela étant, on montre comme au 1° que

$$\lim_{\substack{AA_4 \overrightarrow{<} AA_1 \\ AB \overrightarrow{>} 0}} \frac{A_4B_4}{AB} = \varphi(AA_1).$$

D'après (I), on a donc

$$\lim_{AA_4 \overrightarrow{<} AA_1} \varphi(AA_4) = \varphi(AA_1).$$

3°) On admet l'hypothèse de l'angle obtus et le point A_4 reste entre A_1 et A_3. Dans ce cas, on démontre qu'on a

$$\lim_{AA_4 \overrightarrow{>} AA_1} \varphi(AA_4) = \varphi(AA_1)$$

en raisonnant de la même manière qu'au 2°.

4°) On admet l'hypothèse de l'angle obtus et le point A_4 reste entre A_2 et A_1. Dans ce cas, on démontre qu'on a

$$\lim_{AA_4 \overrightarrow{<} AA_1} \varphi(AA_4) = \varphi(AA_1)$$

en raisonnant comme au 1°.

En réunissant le 1° et le 2°, on trouve dans l'hypothèse de l'angle aigu

$$\text{(3)} \qquad \lim_{AA_4 = AA_1} \varphi(AA_4) = \varphi(AA_1).$$

En réunissant le 3° et le 4°, on trouve que (3) est encore valable dans l'hypothèse de l'angle obtus. La fonction $\varphi(x)$ est donc continue pour toutes les valeurs non nulles de x pour lesquelles elle est définie.

Laissons maintenant le point A_4 se mouvoir entre A_2 et A, A_4 restant toutefois distinct de A. On établit qu'on a

$$\lim_{AA_4 \gtrless 0} \varphi(AA_4) = 1$$

en raisonnant comme au 1° dans l'hypothèse de l'angle aigu et comme au 3° dans l'hypothèse de l'angle obtus. On a donc

$$\lim_{x \gtrless 0} \varphi(x) = \varphi(0),$$

et le théorème est complètement établi.

339. Théorème. *Soit* ABB''A'' *un quadrilatère birectangle isoscèle, les angles droits étant en* A *et en* B. *Soit* A' *un point de* | AA'' *pouvant coïncider avec* A *tel que la fonction* $\varphi(x)$ *du* § 336 *soit définie pour* $x = AA'$. *Supposons que les points* A *et* A' *ainsi que les semi-droites* | AA'' *et* | AB *restent fixes. On a*

$$\lim_{\substack{AA'' = AA' \\ AB \gtrless 0}} \frac{A''B''}{AB} = \varphi(AA')$$

si A' *est distinct de* A *et*

$$\lim_{\substack{AA'' \gtrless 0 \\ AB \gtrless 0}} \frac{A''B''}{AB} = \varphi(0)$$

si A' *coïncide avec* A.

Démonstration. Supposons d'abord A' distinct de A. Soit α un nombre positif arbitrairement petit. On peut trouver sur | AA' deux points fixes A_1 et A_2 situés respectivement en deça et au delà de A' tels que $\varphi(x)$ soit défini pour $x = AA_1$ et pour $x = AA_2$ et que

$$(1) \quad |\varphi(AA_2) - \varphi(AA')| < \frac{\alpha}{2}, \quad |\varphi(AA_1) - \varphi(AA')| < \frac{\alpha}{2} \text{ (§ 338)}.$$

Si B est assez près de A, il y a sur | BB'' un point B_2 tel que $BB_2 = AA_2$ et un point B_1 tel que $BB_1 = AA_1$; B_1 est d'ailleurs entre B et B_2. On peut trouver sur | AB un point

fixe L tel que l'on a

$$(2)\qquad \left| \frac{A_2B_2}{AB} - \varphi(AA_2) \right| < \frac{\alpha}{2},$$

$$(3)\qquad \left| \frac{A_1B_1}{AB} - \varphi(AA_1) \right| < \frac{\alpha}{2}$$

dès que B est entre A et L (§ 335).

Supposons maintenant A'' entre A_1 et A_2 et B entre A et L. B'' sera entre B_1 et B_2. On aura d'après (1) et (2)

$$(4)\qquad \left| \frac{A_2B_2}{AB} - \varphi(AA') \right| < \alpha,$$

et d'après (1) et (3)

$$(5)\qquad \left| \frac{A_1B_1}{AB} - \varphi(AA') \right| < \alpha.$$

Or, $\frac{A''B''}{AB}$ est compris entre $\frac{A_2B_2}{AB}$ et $\frac{A_1B_1}{AB}$ (§ 333). On a donc d'après (4) et (5)

$$\left| \frac{A''B''}{AB} - \varphi(AA') \right| < \alpha,$$

et cela a lieu dès que A'' est entre A_1 et A_2 et B entre A et L. On a donc

$$\lim_{\substack{AA'' = AA' \\ AB \gtrless 0}} \frac{A''B''}{AB} = \varphi(AA').$$

Si A' coïncide avec A, on montre qu'on a

$$\lim_{\substack{AA'' \gtrless 0 \\ AB \gtrless 0}} \frac{A''B''}{AB} = \varphi(0)$$

par la même méthode que celle que nous venons de suivre ; seulement, il suffit de considérer un point A_2 de | AA'' distinct de A pour lequel on a

$$|\varphi(AA_2) - \varphi(0)| < \frac{\alpha}{2},$$

et d'assujetir A'' à rester entre A et A_2.

340. Théorème. *Soit* CBB''C'' *un quadrilatère trirectangle,*

les angles droits étant en C, *en* B *et* C''. *Soit* C' *un point de* | CC'' *pouvant coïncider avec* C *tel que la fonction* $\varphi(x)$ *du* § 336 *soit définie pour* $x = CC'$. *Supposons que les points* C *et* C' *ainsi que les semi-droites* | CB *et* | CC'' *restent fixes. On a*

$$\lim_{\substack{CC'' = CC' \\ CB \gtrless 0}} \frac{C''B''}{CB} = \varphi(CC')$$

si C' *est distinct de* C *et*

$$\lim_{\substack{CC'' \gtrless 0 \\ CB \gtrless 0}} \frac{C''B''}{CB} = \varphi(0)$$

si C' *coïncide avec* C.

Démonstration. On voit aisément que si CB et | CC'' — CC' | sont assez petits, on pourra trouver sur C''B'' un point A'' tel que C'' est entre A'' et B'' et tel que C''B'' = C''A''; on pourra aussi sur CB trouver un point A tel que C est entre A et B et que CB = CA. On a

$$(1) \qquad \frac{C''B''}{CB} = \frac{A''B''}{AB}.$$

ABB''A'' est un quadrilatère birectangle isoscèle ; quand CB tend vers zéro et CC'' vers CC', on voit aisément qu'on a

$$\lim AA'' = CC',$$
$$\lim AB = 0.$$

On déduit aisément du § 339 qu'on a

$$(2) \qquad \lim \frac{A''B''}{AB} = \varphi(CC').$$

De (1) et (2) résulte le théorème à démontrer.

341. Théorème. *Il existe un nombre c tel que l'on a*

$$\varphi(x) = \cos x \sqrt{c}$$

pour toutes les valeurs de x pour lesquelles la fonction $\varphi(x)$ *du* § 336 *est définie. Le nombre c est unique quand l'unité de longueur est donnée, c est négatif dans l'hypothèse de l'angle aigu, nul dans celle de l'angle droit, positif et inférieur à* π^2 *dans l'hypothèse de l'angle obtus.*

Démonstration. Rappelons d'abord quelques définitions

et propriétés relatives à la fonction cos z, dans le cas où la variable z est complexe.

Si x désigne un nombre réel et si i désigne $+\sqrt{-1}$, on écrit par définition

$$(1) \qquad e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Si z est un nombre de la forme $x + iy$, x et y étant réels, on écrit par définition

$$e^z = e^x \,.\, e^{iy}.$$

De (1) on déduit aisément

$$(2) \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Si z est un nombre complexe on écrit par définition, par analogie avec (2),

$$(3) \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

De (3) on déduit aisément que si x et y sont des nombres réels on a

$$(4) \qquad \begin{cases} \cos (x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y, \\ \sin (x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y. \end{cases}$$

On établit que les différentes formules relatives aux fonctions cos z et sin z, démontrées dans la trigonométrie ordinaire pour le cas où z est réel, sont encore vraies lorsque z est complexe. Nous nous baserons souvent dans la suite sur cette règle importante, sans chaque fois la rappeler expressément.

Si l'on fait $x = 0$ dans la première des égalités (4), on trouve

$$\cos iy = \operatorname{ch} y.$$

Si donc x est un nombre réel quelconque et c un nombre négatif, on a

$$\cos x \sqrt{c} = \operatorname{ch} x \sqrt{|c|}.$$

Nous pourrions donc éviter l'emploi de nombres imaginaires dans l'énoncé du théorème à démontrer en employant le cosinus hyperbolique dans l'hypothèse de

l'angle aigu. Mais l'introduction de nombres imaginaires permet d'employer la fonction cosinus aussi bien dans l'hypothèse de l'angle aigu que dans celle de l'angle obtus; de la sorte on peut beaucoup mieux faire ressortir les analogies entre les propriétés des figures dans l'hypothèse de l'angle obtus d'une part et dans celle de l'angle aigu d'autre part.

Abordons maintenant la démonstration du théorème que nous avons énoncé. Nous allons d'abord démontrer qu'il existe toujours au moins un nombre c tel que l'on a

$$\varphi(x) = \cos x\sqrt{c}$$

pour toutes les valeurs de x pour lesquelles la fonction $\varphi(x)$ est définie.

Dans l'hypothèse de l'angle droit, $c = 0$ satisfait à la question.

Plaçons-nous maintenant dans l'une quelconque des deux autres hypothèses. Soient u et v deux nombres pour lesquels la fonction $\varphi(x)$ est définie tels que $\varphi(x)$ soit défini aussi pour le nombre $u + v$.

Il existe un segment (AA_3) ayant pour mesure $u + v$. Soit u un des deux nombres u et v qui n'est pas plus petit que l'autre. On a alors $u \geqslant v$. Sur (AA_3) existe un point A_2 tel que (AA_2) a pour mesure u et que (A_2A_3) a pour mesure v. Sur (AA_2) existe un point A_1 tel que (A_1A_2) a pour mesure v; on a alors $AA_1 = u - v$.

Soit a une semi-droite fixe issue de A et perpendiculaire à AA_3. Soit B un point quelconque de a distinct de A. Elevons en B la perpendiculaire à a dans le plan de A_3 et de a. Si B est assez près de A, il y aura sur cette perpendiculaire un point B_3 situé du même côté de a que A_3 et tel que $BB_3 = AA_3$ (§ 328). La droite BB_3 ne passe par aucun point de (AA_3), puisque $\varphi(x)$ est supposé défini pour $x = u + v$; A_3ABB_3 sera donc un quadrilatère birectangle isoscèle (§ 328). Sur (BB_3) il y a un point B_2 tel que $BB_2 = AA_2$. Sur (BB_2) il y a un point B_1 tel que $BB_1 = AA_1$. Elevons en A_2 la perpendiculaire à A_2B_2 dans le plan A_3AB. Soit p la moitié de cette perpendi-

culaire située du même côté de A_2B_2 que A. Si AB tend vers zéro, $\sphericalangle AA_2B_2$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ (§ 329) et $(p, |A_2A)$ tend vers zéro. De plus, p reste toujours du même côté de AA_3 (§ 323). Considérons deux semi-droites fixes distinctes issues de A_1, n'appartenant pas à la droite AA_3, situées dans le plan A_3AB du même côté de AA_3 que p et faisant l'une un angle aigu et l'autre un angle obtus avec $|A_1A$. Si AB est assez petit, p coupera ces deux semi-droites issues de A_1 (§ 161). Si AB tend vers zéro, $\sphericalangle AA_1B_1$ tend vers $\frac{\pi}{2}$; si donc AB est assez petit, une des deux semi-droites déterminées par A_1 sur A_1B_1 sera entre les deux semi-droites fixes issues de A_1 et coupera donc p. Soit P_1 le point d'intersection de p et de la droite A_1B_1. Si AB tend vers zéro, les mesures des segments déterminés par A_1 d'une part et par les points d'intersection de p avec les deux semi-droites fixes issues de A_1 tendront vers zéro; A_1P_1 tendra donc aussi vers zéro.

On démontre de la même manière que si B est assez près de A, A_3B_3 coupera la semi-droite opposée à p en un point P_3 et que A_3P_3 tend vers zéro quand AB tend vers zéro.

Quand AB tend vers zéro, A_3B_3 tend vers zéro (§ 329) et $A_3P_3 + A_3B_3$ tend vers zéro. Si AB est assez petit, on pourra donc toujours trouver un point de $|A_3B_3$ déterminant avec A_3 un segment de mesure $A_3P_3 + A_3B_3$ et un point de la semi-droite opposée à $|A_3B_3$ déterminant avec A_3 un segment de mesure A_3P_3 (§ 154). Dès qu'on peut trouver ces deux points, on pourra trouver deux points sur la droite A_3B_3 situés de part et d'autre de B_3 et déterminant avec B_3 des segments congruents à (A_3P_3). Si P_3 est sur $|A_3B_3$, nous désignerons par Q_3 celui de ces deux derniers points qui est sur $|B_3A_3$; si P_3 est sur la semi-droite opposée à $|A_3B_3$, nous désignerons par Q_3 celui de ces deux points qui est sur la semi-droite opposée à $|B_3A_3$. On a toujours $\sphericalangle P_3A_3A_2 = \sphericalangle Q_3B_3B_2$. Comme on a $A_3P_3 = B_3Q_3$ et $A_2A_3 = B_2B_3$, on a $\sphericalangle A_3A_2P_3 = \sphericalangle B_3B_2Q_3$

et de là on déduit aisément qu'on a $\sphericalangle P_3A_2B_2 = \sphericalangle Q_3B_2A_2$. Q_3B_2 est donc perpendiculaire à A_2B_2, ou, en d'autres mots, la perpendiculaire élevée en B_2 à A_2B_2 dans le plan A_3AB coupe A_3B_3 en un point Q_3.

On montre de la même façon que si AB est assez petit, Q_3B_2 coupe A_1B_1 en un point Q_1.

Quand AB tend vers zéro, A_2P_3, B_2Q_3, A_2P_1 et B_2Q_1 tendent vers v. Comme $\varphi(x)$ est défini pour $x = v$, $\varphi(x)$ est défini pour un nombre fixe supérieur à v. Si donc AB est assez petit, $\varphi(x)$ sera défini pour $x = A_2P_3, B_2Q_3, A_2P_1$ ou B_2Q_1. P_1P_3 ne pourra donc passer par aucun point de (Q_1Q_3) et Q_1Q_3 ne pourra passer par aucun point de (P_1P_3). Dans l'hypothèse de l'angle obtus, A_3 et B_3 seront situés entre P_3 et Q_3, P_1 sera sur $|A_1B_1$ et Q_1 sera sur $|B_1A_1$; d'après ce que nous venons de voir, nous pouvons de plus affirmer que dans ce cas P_1 sera entre A_1 et B_1 et Q_1 entre P_1 et B_1, dès que AB est assez petit. Dans l'hypothèse de l'angle aigu, A_1 et B_1 sont entre P_1 et Q_1, P_3 est entre A_3 et B_3 et Q_3 entre P_3 et B_3.

On a

$$A_3P_3 = B_3Q_3, \quad A_2P_3 = B_2Q_3,$$
$$A_1P_1 = B_1Q_1, \quad A_2P_1 = B_2Q_1.$$

On voit aisément que si AB est assez petit, on pourra trouver sur $|A_2P_1$ un point P'_3 tel que $A_2P'_3 = A_2P_3$. On a alors $A_1P'_3 = A_3P_3$ et $\sphericalangle A_2P'_3A_1 = \sphericalangle A_2P_3A_3$.

On voit maintenant aisément d'après le § 324 que si AB tend vers zéro, $\sphericalangle A_2P_1A_1$ et $\sphericalangle A_2P_3A_3$ tendent vers $\frac{\pi}{2}$; $\sphericalangle P'_3P_1A_1$ et $\sphericalangle A_2P'_3A_1$ tendent donc vers $\frac{\pi}{2}$; $\sphericalangle P_1P'_3A_1$ tend aussi vers $\frac{\pi}{2}$ et $\sphericalangle P_1A_1P'_3$ tend vers zéro.

On a donc

$$\lim \frac{P_1P'_3}{A_1P_1} = 0 \quad (\S\ 327),$$

$$\lim \frac{A_1P'_3}{A_1P_1} = 1,$$

$$\lim \frac{A_3P_3}{A_1P_1} = 1.$$

Convenons de désigner par ε_1, ε_2, ... des quantités qui tendent vers zéro quand AB tend vers zéro. Nous aurons alors

$$\frac{A_3P_3}{A_1P_1} = 1 + \varepsilon_1,$$

(1') $$A_3P_3 = A_1P_1 + \varepsilon_1 A_1P_1.$$

$\frac{A_3B_3}{AB}$ et $\frac{A_1B_1}{AB}$ sont limités supérieurement (§ 335). Or, l'une au moins des inégalités $A_3P_3 < A_3B_3$ ou $A_1P_1 < A_1B_1$ a constamment lieu. L'une au moins des deux quantités $\frac{A_3P_3}{AB}$ ou $\frac{A_1P_1}{AB}$ est donc limitée supérieurement. Or, si l'une de ces deux quantités est limitée supérieurement, l'autre l'est aussi, d'après (1'). $\frac{A_1P_1}{AB}$ est donc toujours limité supérieurement. On a donc

$$\frac{A_1P_1}{AB}\varepsilon_1 = \varepsilon_2,$$

$$A_1P_1 . \varepsilon_1 = \varepsilon_2 . AB.$$

De (1') on tire maintenant

(2') $$A_3P_3 = A_1P_1 + \varepsilon_2 AB.$$

On a ensuite

$$A_3P_3 = \tfrac{1}{2} \,|\, A_3B_3 - P_3Q_3 \,|,$$
$$A_1P_1 = \tfrac{1}{2} \,|\, P_1Q_1 - A_1B_1 \,|.$$

Remplaçons A_1P_1 et A_3P_3 par leurs valeurs dans (2') :

$$\tfrac{1}{2} \,|\, A_3B_3 - P_3Q_3 \,| = \tfrac{1}{2} \,|\, P_1Q_1 - A_1B_1 \,| + \varepsilon_2 AB.$$

D'après ce qui précède, $A_3B_3 - P_3Q_3$ et $P_1Q_1 - A_1B_1$ sont toujours de même signe. On a donc dans tous les cas

(3') $$A_3B_3 - P_3Q_3 = P_1Q_1 - A_1B_1 + \varepsilon_3 . AB.$$

D'après les §§ 335 et 339 on voit aisément qu'on a

$$\frac{A_2B_2}{AB} = \varphi(u) + \varepsilon_4,$$

(4') $$A_2B_2 = \varphi(u)\, AB + \varepsilon_4 AB,$$

(5') $$A_1B_1 = \varphi(u - v)\, AB + \varepsilon_5 AB,$$

(6′) $A_3B_3 = \varphi(u+v)AB + \varepsilon_6 AB,$

$$\frac{P_3Q_3}{A_2B_2} = \varphi(v) + \varepsilon_7,$$

(7′) $P_3Q_3 = \varphi(v)A_2B_2 + \varepsilon_7 A_2B_2,$

(8′) $P_1Q_1 = \varphi(v)A_2B_2 + \varepsilon_8 A_2B_2.$

Remplaçons dans (7′) et (8′) A_2B_2 par sa valeur fournie par (4′) :

(9′) $P_3Q_3 = [\varphi(v) + \varepsilon_7]\,[\varphi(u) + \varepsilon_4]\,AB,$

(10′) $P_1Q_1 = [\varphi(v) + \varepsilon_8]\,[\varphi(u) + \varepsilon_4]\,AB.$

Remplaçons dans (3′) A_3B_3, P_3Q_3, P_1Q_1 et A_1B_1 par leurs valeurs fournies par (6′), (9′), (10′) et (5′) :

$$\varphi(u+v)AB + \varepsilon_6 AB - [\varphi(v) + \varepsilon_7]\,[\varphi(u) + \varepsilon_4]\,AB$$
$$= [\varphi(v) + \varepsilon_8]\,[\varphi(u) + \varepsilon_4]\,AB - [\varphi(u-v)AB + \varepsilon_5 AB] + \varepsilon_3 AB.$$

En supprimant le facteur commun non nul AB et en passant à la limite pour AB tendant vers zéro, on trouve

(11′) $\varphi(u+v) + \varphi(u-v) = 2\varphi(u)\varphi(v).$

Soit x_1 un nombre différent de zéro pour lequel $\varphi(x)$ est défini. Dans l'hypothèse de l'angle obtus on a

$$0 < \varphi(x_1) < 1 \quad (\S\ 337).$$

On peut donc trouver un nombre positif c satisfaisant à

$$0 < x_1\sqrt{c} < \frac{\pi}{2},$$

tel que l'on a (1)

(12′) $\varphi(x_1) = \cos x_1\sqrt{c}.$

Dans l'hypothèse de l'angle aigu on a

$$\varphi(x_1) > 1 \quad (\S\ 337).$$

On peut donc trouver un nombre négatif c tel que l'on a

$$\varphi(x_1) = \text{ch}\, x_1\sqrt{|c|}.$$

(1) x et y étant 2 nombres réels, l'égalité « $y = \cos x$ » a dans tout ce livre le même sens que la proposition suivante : « si les postulats euclidiens sont admis et si le cosinus d'un arc de cercle est défini comme on le fait d'ordinaire dans la trigonométrie de la géométrie euclidienne, alors y est le cosinus d'un arc de cercle dont la mesure avec le rayon du cercle comme unité est x. » — Même remarque pour les autres fonctions trigonométriques.

On aura alors comme tantôt

$$\varphi(x_1) = \cos x_1 \sqrt{c}. \tag{12'}$$

Nous avons donc dans tous les cas trouvé un nombre réel non nul c tel que l'on a (12').

Faisons dans (11') $u = \frac{x_1}{2}$ et $v = \frac{x_1}{2}$. On trouve

$$\varphi(x_1) + 1 = 2\varphi^2\left(\frac{x_1}{2}\right),$$

$$\varphi\left(\frac{x_1}{2}\right) = +\sqrt{\frac{\varphi(x_1)+1}{2}}. \tag{13'}$$

Or, aussi bien lorsque l'argument du cosinus est imaginaire que lorsque cet argument est réel, on a

$$\cos x_1\sqrt{c} + 1 = 2\cos^2\frac{x_1\sqrt{c}}{2}.$$

Si c est négatif, $\cos\frac{x_1\sqrt{c}}{2}$ est toujours positif. Si c est positif, on a d'après ce qui précède

$$x_1\sqrt{c} < \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{x_1\sqrt{c}}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

$\cos\frac{x_1\sqrt{c}}{2}$ est donc encore positif et l'on a dans tous les cas

$$\cos\frac{x_1\sqrt{c}}{2} = +\sqrt{\frac{\cos x_1\sqrt{c}+1}{2}}. \tag{14'}$$

D'après (12'), (13') et (14') on a

$$\varphi\left(\frac{x_1}{2}\right) = \cos\frac{x_1}{2}\sqrt{c}.$$

En continuant à raisonner de la même manière, on trouve pour n entier et positif

$$\varphi\left(\frac{x_1}{2^n}\right) = \cos\frac{x_1}{2^n}\sqrt{c}. \tag{15'}$$

Or, si l'on a

$$\varphi(u) = \cos u\sqrt{c},$$
$$\varphi(v) = \cos v\sqrt{c},$$
$$u \geqslant v,$$
$$\varphi(u-v) = \cos(u-v)\sqrt{c},$$

et si $\varphi(u+v)$ existe, on a d'après (11')

$$\varphi(u+v) = 2\cos u\sqrt{c}.\cos v\sqrt{c} - \cos(u-v)\sqrt{c}$$
$$= \cos(u+v)\sqrt{c}.$$

Cela étant, on déduit aisément de (15') que si m et n sont deux nombres entiers et positifs et si $\varphi\left(\frac{m}{2^n}x_1\right)$ existe, on a

(16') $$\varphi\left(\frac{m}{2^n}x_1\right) = \cos\frac{m}{2^n}x_1\sqrt{c}.$$

Soit maintenant x un nombre quelconque tel que $\varphi(x)$ existe. Nous pouvons faire varier les nombres positifs et entiers m et n de telle façon que

$$\lim \frac{m}{2^n}x_1 = x.$$

A partir d'un certain instant $\varphi\left(\frac{m}{2^n}x_1\right)$ existera (§ 336) et l'on aura d'après (16')

$$\varphi\left(\frac{m}{2^n}x_1\right) = \cos\frac{m}{2^n}x_1\sqrt{c},$$

$$\varphi(x) = \lim\varphi\left(\frac{m}{2^n}x_1\right) \text{ (§ 338)} = \lim\cos\frac{m}{2^n}x_1\sqrt{c} = \cos x\sqrt{c},$$

puisque la fonction cosinus est continue pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de l'argument. On aura donc

$$\varphi(x) = \cos x\sqrt{c}$$

pour toutes les valeurs de x pour lesquelles la fonction $\varphi(x)$ est définie.

Montrons maintenant que le nombre c est unique. Sup-

posons qu'il existe deux nombres c' et c'' pouvant jouer le rôle de c. On a alors

$$\cos x\sqrt{c'} = \cos x\sqrt{c''}$$

pour toutes les valeurs positives de x suffisamment petites.

Dans l'hypothèse de l'angle aigu, $\cos x\sqrt{c'}$ et $\cos x\sqrt{c''}$ sont réels et supérieurs à 1. On en déduit aisément au moyen des formules (4) que $\sqrt{c'}$ et $\sqrt{c''}$ sont des quantités purement imaginaires ; c' et c'' sont donc négatifs et l'on a $\operatorname{ch} x\sqrt{|c'|} = \operatorname{ch} x\sqrt{|c''|}$; on a donc $c' = c''$.

Dans l'hypothèse de l'angle droit, on a toujours $\cos x\sqrt{c'} = \cos x\sqrt{c''} = 1$, d'où l'on déduit $\sqrt{c'} = \sqrt{c''} = 0$, $c' = c'' = 0$.

Dans l'hypothèse de l'angle obtus, $\cos x\sqrt{c'}$ et $\cos x\sqrt{c''}$ sont réels et compris entre 0 et 1. On en déduit au moyen des formules (4) que $\sqrt{c'}$ et $\sqrt{c''}$ sont réels ; c' et c'' sont donc positifs. On peut donner à x une valeur suffisamment petite pour que $x\sqrt{c'}$ et $x\sqrt{c''}$ soient tous les deux compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Alors on pourra conclure de l'égalité entre les cosinus que les arguments sont égaux ; on a donc encore $c' = c''$.

Pour établir le dernier point qui reste, à savoir que c est inférieur à π^2 dans l'hypothèse de l'angle obtus, nous allons établir deux lemmes qui nous seront utiles encore dans la suite.

Lemme 1. *Si l'on admet l'hypothèse de l'angle obtus et si x est un nombre tel que $\varphi(x)$ existe, on a $x\sqrt{c} < \frac{\pi}{2}$.*

En effet. Si le lemme était faux, on aurait $x\sqrt{c} \geqslant \frac{\pi}{2}$; en diminuant ou en augmentant x d'une manière convenable, on pourrait arriver à une valeur de x telle que $\varphi(x)$ existe et telle que l'on a $3\frac{\pi}{2} > x\sqrt{c} > \frac{\pi}{2}$; on aurait alors $\cos x\sqrt{c} < 0$ et $\varphi(x) = \cos x\sqrt{c}$; $\varphi(x)$ serait négatif, ce qui est impossible.

LEMME 2. *S'il existe un segment de mesure x_1, la fonction $\varphi(x)$ est certainement définie pour $x = \frac{x_1}{2}$.*

En effet. Soit (A_1A_2) un segment de mesure x_1. Soit A le milieu de (A_1A_2). On a $AA_1 = \frac{x_1}{2}$. Menons par A une droite perpendiculaire à A_1A_2 et soit B un point de cette droite autre que A. Si $\varphi(x)$ n'était pas défini pour $x = \frac{x_1}{2}$, la perpendiculaire élevée en B à AB dans le plan A_1AB passerait par un point A′ de (AA_1); soit A″ le point de (AA_2) tel que $AA' = AA''$; la perpendiculaire en question passerait aussi par A″, et les droites A′B, A″B, A_1A_2 et AB coïncideraient toutes entre elles, ce qui est impossible.

Pour établir qu'on a $c < \pi^2$ dans l'hypothèse de l'angle obtus, il suffit de remarquer qu'il existe toujours un segment de mesure 1. $\varphi(x)$ est défini pour $x = \frac{1}{2}$ (lemme 2). On a donc

$$\frac{1}{2}\sqrt{c} < \frac{\pi}{2} \text{(lemme 1)},$$

$$c < \pi^2.$$

Le théorème est ainsi complètement établi.

342. Dans le paragraphe précédent nous venons de voir apparaître dans la géométrie générale une certaine constante c. Nous allons maintenant examiner de plus près la portée de ce fait remarquable.

Tout d'abord le résultat acquis au § 341 va nous permettre de résoudre dans les différents cas la question de savoir entre quelles limites on peut faire correspondre aux nombres positifs des segments qui ont ces nombres pour mesure, sans se heurter à des contradictions avec les postulats.

Dans l'hypothèse de l'angle aigu et dans celle de l'angle droit la réponse à cette question est facile à donner. D'après ce qui a été vu aux §§ 215 et 281, on a en effet le théorème suivant.

THÉORÈME. *Dans l'hypothèse de l'angle aigu ou dans celle de*

l'angle droit, la proposition « étant donné un segment quelconque fixe pris comme unité de longueur, à tout nombre positif il répond des segments ayant ce nombre comme mesure » est compatible avec les postulats de la géométrie générale.

Grâce au § 341, nous pourrons résoudre la question dans l'hypothèse de l'angle obtus également. Nous allons en effet établir le théorème suivant.

THÉORÈME. *Dans l'hypothèse de l'angle obtus, la proposition « étant donné un segment quelconque fixe pris comme unité de longueur, à tout nombre positif x inférieur à $\frac{\pi}{+\sqrt{c}}$ il répond des segments ayant pour mesure x » est compatible avec les postulats de la géométrie générale. Etant donné un segment quelconque fixe pris comme unité de longueur, il est impossible qu'il existe un segment dont la mesure soit égale ou supérieure à $\frac{\pi}{+\sqrt{c}}$.*

DÉMONSTRATION. Pour établir la première partie du théorème, nous allons nous reporter au chapitre XI.

Faisons d'abord une remarque qui va nous servir dans notre démonstration. Au § 314 nous avons vu que l'amplitude d'un angle elliptique est égale à sa mesure elliptique. On voit aisément en raisonnant de la même façon qu'au § 314 que la longueur d'un segment elliptique est proportionnelle à sa mesure elliptique.

Ce point étant établi, nous allons aborder la démonstration de la première partie du théorème. Nous savons que les points, droites et plans elliptiques que nous avons considérés au chapitre XI satisfont avec leurs relations à tous les postulats de la géométrie générale et à l'hypothèse de l'angle obtus. Par conséquent, il existe un nombre c' qui pour les objets elliptiques dans l'espace euclidien à quatre dimensions considérés au chapitre XI joue exactement le même rôle que la constante c de la géométrie générale dans l'hypothèse de l'angle obtus. Nous allons démontrer qu'étant donné un nombre positif x inférieur à $\frac{\pi}{\sqrt{c'}}$, il existe toujours un segment elliptique

qui a pour mesure elliptique x. Cela étant, la première partie de notre théorème sera établie.

Soit (UV) le segment elliptique qui a été choisi comme unité de longueur elliptique et soit α un plan elliptique qui contient U et V. Considérons dans α un quadrilatère birectangle isoscèle elliptique ABB_1A_1, les angles droits étant en A et en B. Laissons les points A et A_1 et la semi-droite | AB fixes et laissons tendre la mesure elliptique de (AB) vers zéro. Si nous employons le même procédé que dans la géométrie générale pour désigner les mesures elliptiques des segments elliptiques, nous pourrons écrire

$$\lim_{AB \gtrapprox 0} \frac{A_1B_1}{AB} = \cos AA_1 \sqrt{c'}.$$

Effectuons maintenant une transformation (M) relativement au plan elliptique α. Le plan elliptique α sera transformé en une moitié (S_1) de la sphère (S) de centre O_1 et de rayon r, les points du grand cercle (C) qui limite (S_1) étant exclus de (S_1). Soient U', V', A', B', A'_1 et B'_1 les points de (S_1) qui correspondent respectivement aux points elliptiques U, V, A, B, A_1 et B_1. Convenons de désigner par $U'V'$, $A'B'$, ... les mesures des arcs de grand cercle de (S_1) terminés aux points U' et V', aux points A' et B', ..., l'unité de longueur étant la même que celle qui a fourni la mesure r pour le rayon de (S). Désignons par $\sphericalangle A'A'_1B'_1$, $\sphericalangle B'B'_1A_1'$, ... les mesures des angles que font entre eux les arcs de grand cercle A'_1A' et $A'_1B'_1$, B'_1B' et $B'_1A'_1$, ..., ces mesures étant prises avec le radian comme unité.

D'après ce qui a été vu au chapitre XI et d'après la remarque que nous avons faite sur la proportionnalité entre les longueurs et les mesures elliptiques des segments elliptiques, nous aurons

$$\text{longueur de (AB)} = A'B',$$

$$\text{longueur de (UV)} = U'V',$$

$$AB = \frac{AB}{UV} = \frac{\text{longueur de AB}}{\text{longueur de UV}} = \frac{A'B'}{U'V'},$$

$$A_1B_1 = \frac{A'_1B'_1}{U'V'},$$

$$AA_1 = \frac{A'A'_1}{U'V'},$$

$$BB_1 = \frac{B'B'_1}{U'V'},$$

$$\frac{\pi}{2} = \sphericalangle A_1AB = \sphericalangle A'_1A'B',$$

$$\frac{\pi}{2} = \sphericalangle B'_1B'A'.$$

Dans le quadrilatère sphérique $A'_1A'B'B'_1$ situé sur (S_1), les côtés $A'A'_1$ et $B'B'_1$ sont donc égaux et les angles en A' et en B' sont droits. Les points A' et A'_1 sont fixes et le point B' tend vers A' en se mouvant le long du grand cercle fixe $A'B'$. On a de plus

$$\lim_{A'B' \gtrless 0} \frac{A'_1B'_1}{A'B'} = \lim_{AB \gtrless 0} \frac{A_1B_1}{AB} = \cos AA_1\sqrt{c'}.$$

Nous pouvons de plus affirmer que le grand cercle $B'B'_1$ ne passe par aucun point de l'arc de grand cercle $A'A'_1$. Les arcs $A'A'_1$ et $B'B'_1$ sont donc moindres qu'un quart de circonférence. Nous savons aussi par la géométrie euclidienne que si l'on prolonge les arcs $A'A'_1$ et $B'B'_1$ au delà de A'_1 et de B'_1 respectivement, ils se couperont en un point P, qui est sur (S), mais peut-être en dehors de (S_1). En considérant les triangles sphériques $PA'_1B'_1$ et $PA'B'$ on trouve aisément par la trigonométrie sphérique euclidienne que

$$\lim_{A'B' \gtrless 0} \frac{A'_1B'_1}{A'B'} = \cos\frac{A'A'_1}{r}.$$

On a donc

$$\cos AA_1\sqrt{c'} = \cos\frac{A'A'_1}{r}.$$

Comme les arguments des cosinus qui figurent dans cette

égalité sont tous les deux compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on a

$$AA_1\sqrt{c'} = \frac{A'A'_1}{r},$$

(1) $$\sqrt{c'} = \frac{U'V'}{r}.$$

Considérons maintenant sur (S_1) deux points L′ et M′ qui tendent vers deux points diamétralement opposés de (C). Soient L et M les points elliptiques de α dont L′ et M′ sont les transformés. On a

$$LM = \frac{L'M'}{U'V'},$$

$$\lim LM = \frac{\lim L'M'}{U'V'} = \frac{\pi r}{U'V'} = \frac{\pi}{\sqrt{c'}} \text{ [d'après (1)].}$$

On peut donc trouver dans α un segment elliptique ayant pour mesure elliptique un nombre positif donné à l'avance inférieur à $\frac{\pi}{\sqrt{c'}}$ et différant arbitrairement peu de $\frac{\pi}{\sqrt{c'}}$. La première partie de notre théorème se trouve ainsi établie.

La seconde partie du théorème résulte immédiatement des lemmes 1 et 2 du § 341.

343. Théorème. *Si les perpendiculaires élevées dans un même plan à une même droite en deux points distincts* P_1 *et* P_2 *ont un point commun* A, *on a*

$$\lim_{x \rightleftarrows AP_1} \varphi(x) = 0.$$

Démonstration. Soit P'_1 un point situé entre A et P_1. Elevons en P'_1 la perpendiculaire à AP_1 dans le plan AP_1P_2; si P_2 est assez rapproché de P_1, cette perpendiculaire passera par un point P'_2 situé entre A et P_2. Laissons A, P_1 et P_2 fixes et faisons tendre $P_1P'_1$ vers P_1A. On a

$$\varphi(P_1P'_1) < \frac{P'_1P'_2}{P_1P_2} \text{ (§ 335, démonstration),}$$

$$\lim P'_1P'_2 = 0,$$

$$\lim \varphi(P_1P'_1) = 0. \qquad \text{C. q. f. d.}$$

344. Théorème. *Plaçons-nous dans l'hypothèse de l'angle obtus. Supposons donné un segment* (AA′) *de mesure* $\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{c}}$ · *Si l'on élève en* A *une perpendiculaire* AB *à* AA′ *et si l'on élève en un point* B *autre que* A *de* AB *la perpendiculaire à* AB *dans le plan* A′AB, *cette dernière perpendiculaire passe par* A′. *Réciproquement, si* A′A *et* A′B *sont perpendiculaires à la droite* AB, *les points* A *et* B *étant distincts, la mesure de* (AA′) *est* $\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{c}}$ ·

Démonstration. Ce théorème se démontre aisément au moyen du § 343.

345. Théorème. *Dans l'hypothèse de l'angle obtus, la proposition « il existe deux droites distinctes situées dans un même plan, perpendiculaires à une même droite et ayant un point commun » n'implique pas contradiction.*

Démonstration. Ce théorème résulte immédiatement des §§ 342 et 344.

346. Il est évident que la fonction $\varphi(x)$ et la constante c dépendent du segment pris comme unité de longueur. Examinons de plus près comment c dépend de l'unité de longueur.

Soient (U_0V_0) et (UV) deux segments quelconques, (U_0V_0) étant fixe et (UV) pouvant varier. Prenons (U_0V_0) comme unité de longueur, sauf là où nous convenons expressément du contraire. Soient $\varphi_0(x)$ et c_0 ce que l'on trouve pour $\varphi(x)$ et c quand (U_0V_0) est pris comme unité et soient $\varphi(x)$ et c la fonction et la constante qu'on trouve en prenant (UV) comme unité. Soit (AA′) un segment fixe tel que $\varphi_0(x)$ soit défini pour $x = AA'$. On a

$$\varphi_0(AA') = \varphi\left(\frac{AA'}{UV}\right),$$

$$\cos AA'\sqrt{c_0} = \cos\frac{AA'}{UV}\sqrt{c},$$

$$\frac{AA'}{UV}\sqrt{c} = AA'\sqrt{c_0},$$

$$c = (UV)^2 c_0. \qquad (1)$$

347. Théorème. *Etant donné un nombre quelconque* c_1 *infé-*

rieur à π^2, *la proposition « il existe un segment tel que si l'on prend ce segment comme unité de longueur, la constante c du* § 341 *soit égale à* c_1 *» est compatible avec les postulats de la géométrie générale.*

Démonstration. Pour démontrer ce théorème, il suffit d'ajouter aux postulats de la géométrie générale l'hypothèse de l'angle aigu, celle de l'angle droit ou celle de l'angle obtus suivant que le nombre donné c_1 est négatif, nul ou positif, et d'appliquer ensuite le § 342 et la formule (1) du § 346.

348. Plaçons-nous dans l'hypothèse de l'angle aigu ou dans celle de l'angle obtus. Supposons donnée une semi-droite *a;* désignons par O l'origine de *a* et par A un point quelconque de *a* distinct de O. Faisons correspondre à chaque position de A la valeur obtenue pour *c* en prenant le segment (OA) comme unité de longueur. A des positions différentes de A répondront des valeurs différentes de *c*. Soit A_1 une position particulière fixe de A ; supposons que la valeur de *c* répondant à cette position de A soit par exemple —3. Si nous disons « A_1 est le point de *a* tel que la valeur obtenue pour *c* en prenant (OA_1) pour unité de longueur soit — 3 », la position de A_1 sera parfaitement définie par ces mots. On peut donc par un nombre fini de mots et par un nombre définir la position d'un point sur une semi-droite supposée préalablement donnée. Si nous ne considérons plus la semi-droite *a* et disons uniquement « (*u*) est l'ensemble des segments tels que si l'on prend l'un d'eux comme unité de longueur, on obtient la valeur — 3 pour *c* », l'ensemble (*u*) sera parfaitement déterminé. Convenons un instant d'entendre par « longueur » un ensemble de segments jouissant des deux propriétés suivantes : 1°) tous les segments de l'ensemble sont congruents entre eux ; 2°) tout segment congruent à un segment de l'ensemble appartient à l'ensemble. Alors on peut dire qu'on peut définir une longueur par un nombre fini de mots et par un nombre, et cela sans supposer donné au préalable quoi que ce soit.

Rien de pareil n'a lieu dans l'hypothèse de l'angle droit

ou dans la géométrie euclidienne. Là toutes les longueurs ont des propriétés complètement analogues et il est impossible de caractériser une longueur uniquement par des mots et par un nombre ; on peut seulement la caractériser par des propriétés relatives à des figures supposées préalablement données.

349. Pour des raisons dont l'exposé tombe en dehors du cadre de ce travail, la constante c s'appelle *courbure de l'espace*. On pose d'ordinaire

(1) $$k = \frac{1}{\pm\sqrt{c}},$$

et c'est la constante k que l'on fait entrer dans les formules. k s'appelle le *paramètre* de la géométrie générale. Dans (1) on peut indifféremment prendre le signe $+$ ou le signe $-$ devant le radical, puisque l'on a toujours $\cos x = \cos(-x)$, quelque soit x, réel ou imaginaire ; convenons toutefois pour fixer les idées de prendre toujours le signe $+$ dans (1). Dans l'hypothèse de l'angle droit on dit conventionnellement que k est infini et que $\frac{1}{k}$ est nul.

Nous passons maintenant au chapitre suivant, où nous allons étudier les relations qui lient les mesures des différents éléments d'un triangle dans la géométrie générale.

CHAPITRE XIV.

Trigonométrie.

350. Théorème. *Supposons donnés un angle aigu* $\sphericalangle AOA_1$ *et un point* B *sur* | OA *tel que la perpendiculaire élevée en* B *à* OA *dans le plan* AOA_1 *coupe* | OA_1 *en un point* B_1 *et tel qu'il n'existe aucune droite perpendiculaire à la fois à* OA *et à* OA_1 *et passant par un point de* (OB). *Si l'on élève en un point* C *situé entre* O *et* B *la perpendiculaire à* OA *dans le plan* AOA_1, *cette perpendiculaire coupe* OA_1 *en un point* C_1 *situé entre* O *et* B_1 *et l'on a* $BB_1 > CC_1$.

Démonstration. Si C_1 n'était pas entre O et B_1, CC_1 et (BB_1) auraient un point commun, la droite joignant O à ce point serait perpendiculaire à OA et $\sphericalangle AOA_1$ ne serait pas aigu, ce qui est contraire à l'hypothèse.

On n'a pas $CC_1 = BB_1$, sinon la perpendiculaire élevée au milieu de (CB) à OA dans le plan AOA_1 serait perpendiculaire à OA_1.

Supposons $CC_1 > BB_1$. Il y a alors un point C'_1 entre C et C_1 tel que $CC'_1 = BB_1$. $B_1C'_1$ passe par un point P de (OC). La perpendiculaire élevée au milieu M de (BC) passe par le milieu de $(B_1C'_1)$ et est perpendiculaire à B_1P. Il y a entre O et M un point N tel que ON = PM. On voit aisément que si l'on élève la perpendiculaire en N à OA dans le plan AOA_1, cette perpendiculaire sera aussi perpendiculaire à OA_1, ce qui est contraire à l'hypothèse. On n'a donc pas $CC_1 > BB_1$.

On a donc $BB_1 > CC_1$. C. q. f. d.

351. Théorème. *Supposons donné un angle aigu* $\sphericalangle AOA_1$ *et supposons que la perpendiculaire élevée en* A *à* OA *dans le plan* AOA_1 *coupe* | OA_1. *Supposons enfin qu'il n'existe aucune droite perpendiculaire à la fois à* OA *et à* OA_1 *et passant par un point de* (OA). *Soient* B, C *et* D *trois points situés entre*

O *et* A, C *étant entre* O *et* B, D *entre* O *et* C *et les segments* (BC) *et* (CD) *étant congruents entre eux. Les perpendiculaires élevées en* B, *en* C *et* D *à* OA *dans le plan* AOA_1 *coupent* $|OA_1$ *respectivement en des points* B_1, C_1 *et* D_1; C_1 *est entre* O *et* B_1, D_1 *entre* O *et* C_1. *On a toujours* $B_1C_1 > C_1D_1$, *toujours* $B_1C_1 = C_1D_1$, *ou toujours* $B_1C_1 < C_1D_1$ *suivant qu'on se place dans l'hypothèse de l'angle aigu, dans celle de l'angle droit ou dans celle de l'angle obtus.*

Démonstration. La première partie du théorème relative à la disposition des points B_1, C_1 et D_1 résulte du § 350. Pour établir la seconde partie, on peut raisonner comme suit.

On a $DD_1 < BB_1$ (§ 350). Il y a un point B'_1 entre B et B_1 tel que $BB'_1 = DD_1$. Menons $C_1B'_1$. On voit aisément comme au § 334 qu'on a

$$\sphericalangle C_1B'_1B_1 = \sphericalangle OD_1D, \quad C_1D_1 = C_1B'_1.$$

On a maintenant

$\sphericalangle OD_1D > \sphericalangle C_1B_1B'_1$ dans l'hypothèse de l'angle aigu (§321),
$\sphericalangle OD_1D = \sphericalangle C_1B_1B'_1$ dans l'hypothèse de l'angle droit,
$\sphericalangle OD_1D < \sphericalangle C_1B_1B'_1$ dans l'hypothèse de l'angle obtus (§321).

On a donc

$C_1B_1 > C_1D_1$ dans l'hypothèse de l'angle aigu,
$C_1B_1 = C_1D_1$ » » » » droit,
$C_1B_1 < C_1D_1$ » » » » obtus.

C. q. f. d.

352. Théorème. *Soit* OAA_1 *un triangle rectangle, l'angle droit étant en* A, *et l'angle en* O *étant aigu. Si le point* O *ainsi que les semi-droites* $|OA$ *et* $|OA_1$ *restent fixes tandis que* OA *tend vers zéro, le rapport du segment* (OA) *au segment* (OA_1) *tendra vers une limite déterminée finie.*

Démonstration. En se basant sur le § 351 et en raisonnant comme au § 335 on démontre aisément que si OA décroît, $\frac{OA}{OA_1}$ croît, reste constant ou décroît suivant qu'on se place dans l'hypothèse de l'angle aigu, de l'angle droit ou de l'angle obtus. $\frac{OA}{OA_1}$ tend donc toujours vers une limite

déterminée. Cette limite est finie parce que si OA est assez petit, on a $\frac{OA}{OA_1} < 1$ (§ 175).

353. Désignons par $f(\theta)$ la fonction définie comme suit : on a $f(0) = 1$; si l'on a $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $f(\theta)$ est égal à la valeur de la limite dont il est question au § 352 lorsque $\sphericalangle AOA_1 = \theta$; on a $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Si l'on n'a pas $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, $f(\theta)$ n'a pas de valeur.

354. Théorème. *Supposons donné un nombre θ satisfaisant à $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. A chaque nombre positif α arbitrairement petit on peut faire correspondre trois nombres positifs β_1, β_2, β_3 suffisamment petits pour que l'on ait, $f(\theta)$ étant la fonction définie au* § 353,

$$\left| \frac{OA}{OA_1} - f(\theta) \right| < \alpha$$

dans tous les triangles OAA_1 *où l'on a*

$$OA < \beta_1, \quad |\sphericalangle AOA_1 - \theta| < \beta_2, \quad \left|\sphericalangle OAA_1 - \frac{\pi}{2}\right| < \beta_3.$$

Démonstration. Supposons d'abord $\theta = \frac{\pi}{2}$. Soit (BC) un segment fixe quelconque. D'après les §§ 324 et 327 on peut trouver des nombres β'_1, β_2 et β_3 suffisamment petits pour que l'on ait

$$\left| \frac{OA}{OA_1} - f\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| < \alpha$$

dès que

$$OA_1 < BC, \quad OA < \beta'_1,$$

$$\left|\sphericalangle AOA_1 - \frac{\pi}{2}\right| < \beta_2, \quad \left|\sphericalangle OAA_1 - \frac{\pi}{2}\right| < \beta_3.$$

On voit de plus immédiatement qu'on a

$$\left| \frac{OA}{OA_1} - f\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| < \alpha$$

dès que

$$OA_1 \geqslant BC, \quad OA < \alpha\, BC.$$

En prenant pour β_1 le plus petit des nombres β'_1 et α BC, on voit que le théorème est exact.

Supposons $\theta = 0$. Prenons pour β_1 un nombre positif tel qu'il existe un segment ayant pour mesure β_1 et laissons β_1 fixe. Nous pouvons prendre β_2 et β_3 assez petits pour que $\frac{AA_1}{OA}$ et $\frac{AA_1}{OA_1}$ restent arbitrairement petits (§ 327). Nous pouvons donc prendre β_2 et β_3 assez petits pour que $\left|\frac{OA}{OA_1} - 1\right|$, c. à d. $\left|\frac{OA}{OA_1} - f(0)\right|$ reste arbitrairement petit. Le théorème est donc établi.

Passons maintenant au cas général où θ satisfait à

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Nous supposons donné un nombre positif α arbitrairement petit et nous allons établir l'existence des trois nombres β_1, β_2 et β_3 dont il est question dans l'énoncé.

Désignons pour commencer par β_1, β_2 et β_3 trois nombres positifs quelconques. Nous allons montrer qu'on peut choisir ces nombres de telle manière qu'ils jouissent de la propriété indiquée dans l'énoncé.

Considérons tous les triangles OAA_1 où l'on a

$$OA < \beta_1, \ |\sphericalangle AOA_1 - \theta| < \beta_2, \ \left|\sphericalangle OAA_1 - \frac{\pi}{2}\right| < \beta_3.$$

Prenons un segment quelconque $(O'B_1)$; nous laissons provisoirement ce segment fixe. Considérons une semi-droite fixe issue de O' et faisant avec $|O'B_1$ un angle aigu supérieur à θ. Nous pouvons trouver sur cette semi-droite un point B tel que si X est un point quelconque de $(O'B)$ on a

$$\sphericalangle O'XB_1 > \frac{\pi}{2}.$$

On voit par le théorème de Weierstrass (§ 324) qu'il existe un nombre l tel que

$$\sphericalangle O'XB_1 - \frac{\pi}{2} > l$$

pour tous les points X de $(O'B)$. Si maintenant on prend

$$\beta_1 < O'B, \ \beta_2 < \sphericalangle BO'B_1 - \theta, \ \beta_3 < l,$$

il y aura un point A' entre O' et B tel que $OA = O'A'$; on aura toujours

$$\sphericalangle AOA_1 < \sphericalangle A'O'B_1, \quad \sphericalangle OAA_1 < \sphericalangle O'A'B_1.$$

Il y aura donc deux semi-droites respectivement intérieures aux angles $\sphericalangle A'O'B_1$ et $\sphericalangle O'A'B_1$ et faisant avec $|O'A'$ et $|A'O'$ des angles respectivement congruents à $\sphericalangle AOA_1$ et à $\sphericalangle OAA_1$; elles se couperont en un point A'_1 intérieur au triangle $O'BB_1$. Tous les éléments du triangle OAA_1 seront congruents chacun à chacun à ceux du triangle $O'A'A'_1$.

On a

$$O'A'_1 < O'B_1 + BB_1.$$

$O'B_1$ peut être pris arbitrairement petit et l'on peut faire en sorte que $O'B_1$ et BB_1 diffèrent arbitrairement peu. On peut donc rendre $O'B_1 + BB_1$ arbitrairement petit. Si donc β_1, β_2 et β_3 sont suffisamment petits, $O'A'_1 = OA_1$ restera arbitrairement petit.

Considérons la semi-droite issue de O', située dans le plan $O'BB_1$ du côté de $O'B$ qui est opposé à celui de B_1 et faisant avec $|O'A'$ un angle congruent à $\sphericalangle A'O'A'_1$. Si β_1, β_2, β_3 sont suffisamment petits, cette semi-droite coupera toujours A'_1A' en un point A'_2 et de plus $O'A'_2$ restera arbitrairement petit; on démontre cela en raisonnant exactement de la même manière qu'on l'a fait pour établir la possibilité de la construction du point A'_1 à l'intérieur du triangle $O'BB_1$.

Si β_1, β_2 et β_3 sont assez petits, $\left|\sphericalangle O'A'_1A' - \left(\pi - \frac{\pi}{2} - \theta\right)\right|$ et $\left|\sphericalangle O'A'_2A' - \left(\pi - \frac{\pi}{2} - \theta\right)\right|$ resteront arbitrairement petits (§ 324). On peut donc prendre β_1, β_2 et β_3 assez petits pour que les angles $\sphericalangle O'A'_1A'$ et $\sphericalangle O'A'_2A'$ restent aigus. Quand ces angles restent aigus, il y aura toujours un point P entre A'_1 et A'_2 tel que $O'P$ est perpendiculaire à $A'_1A'_2$ De plus, si β_1, β_2 et β_3 sont suffisamment petits, $O'P$ reste arbitrairement petit.

Soient maintenant O'' un point fixe, a et a_1 deux semi-

droites fixes issues de O'' et faisant entre elles un angle de mesure θ. Si β_1, β_2 et β_3 sont assez petits, on pourra toujours effectuer les constructions suivantes. Soit P' le point de a tel que $O''P' = O'P$. Élevons en P' la perpendiculaire à a dans le plan de a et de a_1; soit P'_1 son point d'intersection avec a_1. Considérons deux semi-droites issues de O'', situées dans le plan de a et de a_1 et déterminant avec a des angles respectivement congruents à $\sphericalangle PO'A'$ et à $\sphericalangle PO'A'_1$, la seconde de ces semi-droites étant toujours située du même côté du support de a que a_1 et la première étant située du même côté du support de a que a_1 ou du côté opposé suivant que A' et A'_1 sont du même côté de P ou de côtés différents; soient A'' et A''_1 les points d'intersection respectifs de ces semi-droites avec $P'P'_1$. On voit immédiatement que la transformation

$$(O', P, A', A'_1) \dots (O'', P', A'', A''_1)$$

sera congruente. On a donc

$$\frac{OA}{OA_1} = \frac{O'A'}{O'A'_1} = \frac{O''A''}{O''A''_1}.$$

Si β_1, β_2 et β_3 sont suffisamment petits, les quantités $\sphericalangle P'_1O''A''_1$, $\left| \sphericalangle O''P'_1A''_1 - \left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) \right|$ et $\sphericalangle P'O''A''$ restent arbitrairement petites (§ 324); donc, les quantités $\left| \frac{O''A''}{O''P'} - 1 \right|$ et $\left| \frac{O''A''_1}{O''P'_1} - 1 \right|$ restent arbitrairement petites (§ 327). D'autre part, la quantité $\left| \frac{O''P'}{O''P'_1} - f(\theta) \right|$ reste arbitrairement petite (§ 352). Il en résulte qu'on peut prendre β_1, β_2 et β_3 assez petits pour que l'on ait toujours

$$\left| \frac{O''A''}{O''A''_1} - f(\theta) \right| < \alpha.$$

Si β_1, β_2 et β_3 sont choisis de cette façon, on aura

$$\left| \frac{OA}{OA_1} - f(\theta) \right| < \alpha$$

dès que

$$OA < \beta_1, \; |AOA_1 - \theta| < \beta_2, \; \left| \sphericalangle OAA_1 - \frac{\pi}{2} \right| < \beta_3.$$

C. q. f. d.

355. Théorème. *La fonction $f(\theta)$ est continue pour les valeurs de θ satisfaisant à $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$; on a de plus*

$$\lim_{\theta \gtrsim 0} f(\theta) = f(0), \quad \lim_{\theta \lesssim \frac{\pi}{2}} f(\theta) = f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Démonstration. Supposons $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Soit OAA_1 un triangle rectangle, l'angle droit étant en A. Supposons le point O et la semi-droite $|OA$ fixes ; OA et $\sphericalangle AOA_1$ sont variables. Désignons par θ' la mesure de $\sphericalangle AOA_1$.

Étant donné un nombre positif α arbitrairement petit, on peut trouver deux nombres positifs β_1 et β_2 suffisamment petits pour que l'on ait

$$(1) \qquad \left| \frac{OA}{OA_1} - f(\theta) \right| < \alpha$$

dès que

$$OA < \beta_1, \; |\theta' - \theta| < \beta_2 \; (\S\ 354).$$

Donnons maintenant à θ' une valeur fixe quelconque telle que l'on a

$$|\theta' - \theta| < \beta_2.$$

Dès que $OA < \beta_1$, on aura (1). Quand OA varie en restant toujours inférieur à β_1, on a toujours (1). Or,

$$\lim_{OA \gtrsim 0} \left| \frac{OA}{OA_1} - f(\theta) \right| = |f(\theta') - f(\theta)|.$$

On a donc

$$|f(\theta') - f(\theta)| \leqslant \alpha.$$

Le théorème est ainsi établi.

On raisonne de la même manière lorsque $\theta = 0$ ou $\theta = \frac{\pi}{2}$.

356. Théorème. *On a $f(\theta) \neq 0$ si $\theta \neq \frac{\pi}{2}$.*

Démonstration. On a $f(0) = 1$.

Supposons qu'il existe une valeur θ_1 de θ satisfaisant à $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$ telle que $f(\theta_1) = 0$. On voit aisément que si θ satisfait à $\theta_1 < \theta < \frac{\pi}{2}$, on a $f(\theta_1) \geqslant f(\theta)$; on a donc $f(\theta) = 0$ pour $\theta_1 < \theta < \frac{\pi}{2}\cdot$ Il en résulte qu'il existe un nombre θ' satisfaisant à $0 < \theta' < \frac{\pi}{2}$ tel que l'on a

$$f(\theta) = 0 \text{ pour } \theta' < \theta < \frac{\pi}{2},$$
$$f(\theta) \neq 0 \text{ pour } 0 < \theta < \theta'.$$

D'après le § 355, on a $f(\theta') = 0$; il en résulte qu'on a $0 < \theta'$.

Nous pouvons construire un triangle rectangle OAA'_1, où l'angle droit est en A et où l'on a $\sphericalangle AOA'_1 = \theta'$. Laissons $|OA$ et $|OA'_1$ fixes et faisons tendre OA vers zéro. On a

(1) $$\lim \frac{OA}{OA'_1} = 0.$$

Soit θ un nombre quelconque satisfaisant à $0 < \theta < \theta'$; soit a_1 la semi-droite issue de O et située entre $|OA$ et $|OA'_1$ telle que $(|OA, a_1) = \theta$; a_1 coupe (AA'_1) en un point A_1. Nous avons

$$\lim \sphericalangle OA'_1A_1 = \frac{\pi}{2} - \theta' \quad (\S\ 324).$$

Nous pouvons trouver deux nombres positifs β_1 et β_2 tels que l'on a

(2) $$\left| \frac{OA_1}{OA'_1} - 1 \right| < \tfrac{1}{2}$$

dès que

$$OA < \beta_1, \quad \theta' - \theta < \beta_2 \quad (\S\ 327).$$

Prenons θ de façon à avoir $\theta' - \theta < \beta_2$, et laissons θ fixe. Si OA tend vers zéro, (2) sera satisfait constamment à partir d'un certain instant. Or, on a

$$f(\theta) \neq 0,$$

(3) $$\lim \frac{OA}{OA_1} \neq 0.$$

D'après (1) et (3) on a

$$\lim \frac{OA_1}{OA'_1} = 0,$$

ce qui est contradictoire avec (2). Il n'existe donc pas de nombre θ_1 satisfaisant à $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$ tel que $f(\theta_1) = 0$ et le théorème est établi.

357. Théorème. *On a* $f(\theta) = \cos\theta$ *pour toutes les valeurs de* θ *pour lesquelles la fonction* $f(\theta)$ *du* § 353 *est définie.*

Démonstration. Soient φ et ψ deux nombres satisfaisant aux inégalités

$$0 < \varphi < \psi < \frac{\pi}{2}, \quad \psi + \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Soient a et d deux semi-droites fixes issues d'un même point O telles que $(a, d) = \varphi + \psi$. Il y a une semi-droite c issue de O et située entre a et d telle que $(a, c) = \psi$; il y a une semi-droite b issue de O et située entre a et c ou coïncidant avec a telle que $(c, b) = \varphi$. On a $(c, d) = \varphi$, $(a, b) = \psi - \varphi$. Soit D un point de d. Si OD est assez petit, il y aura un point B sur b tel que OB = OD. BD coupe c en C. C est le milieu de (BD) et OC est perpendiculaire à BD. Si OD est assez petit, on pourra trouver sur a trois points B′, C′ et D′ tels que BB′, CC′ et DD′ soient perpendiculaires à a.

Faisons tendre OD vers zéro. On voit aisément que OC, OB, OD′, OC′, OB′, DB, DD′, CC′ et BB′ tendent vers zéro. Dans l'hypothèse de l'angle aigu ou dans celle de l'angle droit, deux des droites DD′, CC′ et BB′ ne peuvent avoir de point commun. Dans l'hypothèse de l'angle obtus on peut prendre OD assez petit pour que DD′, CC′ et BB′ restent inférieurs à $k\frac{\pi}{2}$; alors aucun des trois segments (DD′), (CC′) ou (BB′) ne peut contenir un point appartenant au support de l'un des deux autres (§ 344). Si OD tend vers zéro, on a de plus d'après le § 324

$$\lim \measuredangle ODC = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

$$\lim \measuredangle ODD' = \frac{\pi}{2} - (\varphi + \psi).$$

Si OD est assez petit, | DD′ sera donc entre | DO et | DC ou identique à DO, puisque $\frac{\pi}{2} - \varphi > \frac{\pi}{2} - (\varphi + \psi)$ et l'on aura

(1) $$\lim \sphericalangle D'DC = \psi.$$

On a ensuite

$$\lim \sphericalangle OCC' = \frac{\pi}{2} - \psi.$$

Comme $\frac{\pi}{2} - \psi$ est inférieur à $\frac{\pi}{2}$, | CC′ sera entre | CO et | CB si OD est assez petit et l'on aura

(2) $$\lim \sphericalangle C'CB = \psi.$$

De ce qui précède on déduit aussi aisément que si OD est assez petit, C′ sera entre O et B′ et D′ entre O et C′ (ou peut-être en O). L'angle $\sphericalangle$ CD′D est aigu; si OD est assez petit, $\sphericalangle$ CDD′ est aussi aigu d'après (1). Il y a donc un point D_1 entre D et D′ tel que CD_1 est perpendiculaire à DD′. De même, si OD est assez petit, il y aura un point C_1 entre C et C′ tel que BC_1 est perpendiculaire à CC′. Quand OD tend vers zéro nous aurons d'après le § 324 et d'après (1) et (2)

(3) $$\lim \sphericalangle D_1CD = \frac{\pi}{2} - \psi,$$

(4) $$\lim \sphericalangle C_1BC = \frac{\pi}{2} - \psi.$$

Nous aurons ensuite

$$\lim \frac{CD_1}{CD} = f\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) \text{ [d'après (3) et § 354],}$$

$$\lim \frac{BC_1}{BC} = f\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) \text{ [d'après (4) et § 354].}$$

Or, $f\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) \neq 0$ (§ 356) ; on a donc

$$\lim \left(\frac{CD_1}{CD} : \frac{BC_1}{BC}\right) = 1,$$

(5) $$\lim \frac{CD_1}{BC_1} = 1,$$

$$\lim \frac{CD_1}{C'D'} = 1 \text{ (§ 340),}$$

$$\lim \frac{BC_1}{B'C'} = 1 \quad (§ 340),$$

(6) $$\lim \frac{C'D'}{B'C'} = 1.$$

Convenons de désigner par ε_1, ε_2, ... des quantités infiniment petites quand OD tend vers zéro. Nous aurons d'après (6)

$$\frac{C'D'}{B'C'} = 1 + \varepsilon_1,$$

$$\frac{C'D'}{OB} = \frac{B'C'}{OB} + \varepsilon_1 \frac{B'C'}{OB}.$$

Or,

$$\frac{B'C'}{OB} < \frac{B'O}{OB} < 1.$$

On a donc

$$\varepsilon_1 \frac{B'C'}{OB} = \varepsilon_2,$$

(7) $$\frac{C'D'}{OB} = \frac{B'C'}{OB} + \varepsilon_2.$$

On a ensuite d'après le § 352

$$\frac{OB'}{OB} = f(\psi - \varphi) + \varepsilon_3,$$

$$\frac{OC'}{OB} = \frac{OC'}{OC} \cdot \frac{OC}{OB} = f(\psi) f(\varphi) + \varepsilon_4,$$

(8) $$\frac{B'C'}{OB} = \frac{OB'}{OB} - \frac{OC'}{OB} = f(\psi - \varphi) - f(\psi) f(\varphi) + \varepsilon_5,$$

$$\frac{OD'}{OB} = \frac{OD'}{OD} = f(\psi + \varphi) + \varepsilon_6,$$

(9) $$\frac{C'D'}{OB} = \frac{OC'}{OB} - \frac{OD'}{OB} = f(\psi) f(\varphi) - f(\psi + \varphi) + \varepsilon_7.$$

De (7), (8) et (9) on déduit

$$f(\psi) f(\varphi) - f(\psi + \varphi) + \varepsilon_7 = f(\psi - \varphi) - f(\psi) f(\varphi) + \varepsilon_5 + \varepsilon_2.$$

En passant à la limite dans cette égalité pour OD tendant vers zéro, on trouve

(10) $$f(\psi + \varphi) + f(\psi - \varphi) = 2 f(\psi) f(\varphi).$$

On peut trouver un nombre θ_1 tel que $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$ et $0 < f(\theta_1) < 1$ (§ 355) ; on peut trouver un nombre non nul positif a tel que $0 < a\,\theta_1 < \frac{\pi}{2}$ et que $f(\theta_1) = \cos a\,\theta_1$. L'équation (10) est identique à l'équation (11') du § 341 et la fonction $f(\theta)$ est continue de même que la fonction $\varphi(x)$ (§ 355). En raisonnant exactement comme nous l'avons fait au § 341 on peut donc démontrer qu'on a

$$f(\theta) = \cos a\theta$$

pour toutes les valeurs de θ pour lesquelles la fonction $f(\theta)$ a été définie.

On voit aisément qu'on ne peut jamais avoir $a\,\theta > \frac{\pi}{2}$ lorsque la fonction $f(\theta)$ est définie pour la valeur considérée de θ. Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ on a

$$0 = \cos a\frac{\pi}{2}.$$

Comme $a\frac{\pi}{2}$ est positif et ne peut dépasser $\frac{\pi}{2}$, on a $a\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, $a = 1$ et par conséquent

$$f(\theta) = \cos \theta. \qquad \text{C. q. f. d.}$$

358. Théorème. *Supposons donné un nombre θ satisfaisant à $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. A chaque nombre positif α arbitrairement petit on peut faire correspondre trois nombres positifs β_1, β_2 et β_3 suffisamment petits pour que l'on ait*

$$\left| \frac{AA_1}{OA_1} - \sin\theta \right| < \alpha$$

dans tous les triangles OAA_1 où l'on a

$$OA < \beta_1, \quad |\measuredangle AOA_1 - \theta| < \beta_2, \quad \left|\measuredangle OAA_1 - \frac{\pi}{2}\right| < \beta_3.$$

Démonstration. Supposons d'abord $\theta = \frac{\pi}{2}$. Dans ce cas, il faut montrer que l'on peut choisir β_1, β_2 et β_3 assez petits

pour que $\left|\frac{AA_1}{OA_1} - 1\right|$ reste arbitrairement petit. Or, cela résulte directement du § 354.

Supposons ensuite $\theta < \frac{\pi}{2}\cdot$ Nous avons vu au § 354 qu'en prenant β_1, β_2 et β_3 suffisamment petits, on peut faire en sorte que OA_1 reste arbitrairement petit. On peut donc faire en sorte que $\left|\sphericalangle OA_1A - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right|$ reste arbitrairement petit (§ 324). On peut donc faire en sorte que $\left|\frac{AA_1}{OA_1} - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right|$ reste arbitrairement petit (§ 354). Comme $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$, le théorème est établi.

359. Notation. Lorsque dans la suite nous aurons à considérer les mesures des différents côtés et angles d'un triangle ABC, nous emploierons les notations suivantes, conformes à l'usage adopté en trigonométrie :

$$A = \sphericalangle BAC,\quad B = \sphericalangle ABC,\quad C = \sphericalangle ACB,$$
$$a = BC,\quad b = AC,\quad c = AB.$$

360. Théorème. *Lorsque dans un triangle* ABC *on a* $B = \frac{\pi}{2}$, $A < \frac{\pi}{2}$ *et* $C < \frac{\pi}{2}$, *on a toujours*

$$\cos\frac{b}{k} = \frac{\cos C}{\sin A}\cos\frac{a}{k} = \frac{\cos A}{\sin C}\cos\frac{c}{k}\cdot$$

Démonstration. Soit B_1 un point quelconque situé entre A et B (fig. 5). Elevons en B_1 la perpendiculaire à AB dans le plan ABC. Comme on a $A < \frac{\pi}{2}$, cette perpendiculaire ne passe par aucun point de (BC). Lorsque BB_1 est assez petit, on pourra trouver sur cette perpendiculaire un point C_1 situé du même côté de AB que C et tel que $BC = B_1C_1$; B_1BCC_1 sera un quadrilatère birectangle isoscèle (§ 328). Si BB_1 est assez petit, on pourra trouver sur AB un point A_1 tel que A est entre A_1 et B et que $BB_1 = AA_1$. Menons A_1C_1. Les éléments du triangle $A_1B_1C_1$ seront congruents chacun à chacun aux

éléments du triangle ABC. C et A sont situés de côtés différents de C_1B_1. C_1B_1 passe donc par un point C_2 situé entre C et A. C_2 est situé sur $|B_1C_1$. Si BB_1 tend vers zéro, $\sphericalangle C_1CB$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ (§ 329). Si donc BB_1 est assez petit, $\sphericalangle C_1CB$ sera plus grand que $\sphericalangle C_2CB$, $|CC_2$ sera entre $|CB$ et $|CC_1$ et C_2 sera entre C_1 et B_1. Lorsque BB_1 tend vers zéro, on a

$$\lim CC_1 = \lim CC_2 = \lim C_1C_2 = 0,$$

$$\lim \sphericalangle C_2C_1C = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim \sphericalangle C_1CC_2 = \frac{\pi}{2} - C,$$

$$\lim \sphericalangle C_1C_2C = C \text{ (§ 324)}.$$

Si BB_1 est assez petit, les angles $\sphericalangle C_1CC_2$ et $\sphericalangle C_1C_2C$ seront donc aigus, et il y aura un point C_3 entre C et C_2 tel que C_1C_3 est perpendiculaire à CC_2. On a

$$\lim_{BB_1 \gtrless 0} \sphericalangle C_2C_1C_3 = \frac{\pi}{2} - C.$$

Soit M le milieu de (AA_1). Les angles $\sphericalangle MA_1C_1$ et $\sphericalangle MC_1A_1$ sont aigus. Il y a donc un point N_1 entre A_1 et C_1 tel que MN_1 est perpendiculaire à A_1C_1. Si BB_1 tend vers zéro, on a

$$\lim MA_1 = \lim A_1N_1 = \lim MN_1 = 0,$$

$$\lim \sphericalangle A_1MN_1 = \frac{\pi}{2} - A.$$

Si donc BB_1 est assez petit, les droites N_1M et AC se coupent en un point N. M est entre N_1 et N et A est entre N et C. On voit aisément que les éléments du triangle A_1N_1M sont congruents chacun à chacun à ceux du triangle ANM. Comme C_3C_1 et NN_1 tendent vers zéro quand BB_1 tend vers zéro et comme C_3C_1 et NN_1 sont perpendiculaires à NC_3, NN_1 ne pourra passer par un point de (C_3C_1) et C_3C_1 ne pourra passer par un point de (NN_1), dès que BB_1 est assez petit (§ 344). Comme de plus N_1 et C_1 sont situés du même côté de NC_3, $N_1NC_3C_1$ sera un quadrilatère, et ce quadrilatère sera trirectangle.

Convenons de désigner par ε_1, ε_2, ... des quantités infiniment petites lorsque BB_1 tend vers zéro. Nous aurons

$$\frac{C_1C_3}{C_1C_2} = \sin C + \varepsilon_1 \quad (\S\ 358),$$

$$\frac{CC_1}{CC_2} = \sin C + \varepsilon_2,$$

$$\frac{C_1C_3}{C_1C_2} = \frac{CC_1}{CC_2} + \varepsilon_3,$$

$$\frac{CC_1}{BB_1} = \cos\frac{a}{k} + \varepsilon_4 \quad (\S\ 339),$$

$$CC_1 = BB_1 \cos\frac{a}{k} + \varepsilon_4\, BB_1,$$

$$\frac{CC_1}{CC_2} = \frac{BB_1 \cos\frac{a}{k}}{CC_2} + \varepsilon_4 \frac{BB_1}{CC_2},$$

$$\varepsilon_4 \frac{BB_1}{CC_2} = \varepsilon_4 \frac{BB_1}{CC_1}\frac{CC_1}{CC_2} = \varepsilon_4 \frac{\sin C + \varepsilon_2}{\cos\frac{a}{k} + \varepsilon_4} = \varepsilon_5,$$

$$\frac{CC_1}{CC_2} = \frac{BB_1 \cos\frac{a}{k}}{CC_2} + \varepsilon_5,$$

$$\frac{C_1C_3}{C_1C_2} = \frac{BB_1 \cos\frac{a}{k}}{CC_2} + \varepsilon_6,$$

$$\frac{C_1C_3}{NN_1} = \cos\frac{b}{k} + \varepsilon_7 \quad (\S\ 340)^{(1)},$$

$$\frac{NN_1}{AA_1} = \frac{MN_1}{MA_1} = \sin A + \varepsilon_8,$$

$$C_1C_3 = \left(\cos\frac{b}{k} + \varepsilon_7\right) NN_1 = \left(\cos\frac{b}{k} + \varepsilon_7\right)(\sin A + \varepsilon_8)\, AA_1$$
$$= \cos\frac{b}{k} \sin A.\ AA_1 + \varepsilon_9\, AA_1,$$

(1) Pour que l'on puisse écrire cette égalité, il faut avoir établi que la fonction $\varphi(x)$ du § 336 est définie pour $x = b$. Or, s'il n'en était pas ainsi, $\varphi(x)$ ne serait pas défini ponr $x = NC$, et N_1C_1 passerait par un point de (NC); ce point devrait appartenir à (C_3C); cela est impossible parce que les deux semi-droites déterminées par C_1 sur N_1C_1 sont extérieures à $\sphericalangle B_1C_1C$.

$$\cos\frac{b}{k}\sin A.\,AA_1 + \varepsilon_9\,AA_1 = \frac{C_1C_2}{CC_2}\,BB_1\cos\frac{a}{k} + \varepsilon_6\,C_1C_2,$$

$$\cos\frac{b}{k}\sin A + \varepsilon_9 = \frac{C_1C_2}{CC_2}\cos\frac{a}{k} + \varepsilon_6\,\frac{C_1C_2}{BB_1},$$

$$\frac{C_1C_2}{CC_2} = \cos C + \varepsilon_{10} \quad (\S\ 354),$$

$$\varepsilon_6\,\frac{C_1C_2}{BB_1} = \varepsilon_6\,\frac{C_1C_2}{CC_2}\,\frac{CC_2}{BB_1} = \varepsilon_6\,(\cos C + \varepsilon_{10})\,\frac{\cos\frac{a}{k} + \varepsilon_4}{\sin C + \varepsilon_2} = \varepsilon_{11},$$

$$\cos\frac{b}{k}\sin A + \varepsilon_9 = (\cos C + \varepsilon_{10})\cos\frac{a}{k} + \varepsilon_{11}.$$

En passant à la limite dans cette égalité pour BB_1 tendant vers zéro, on trouve

$$\cos\frac{b}{k}\sin A = \cos C\cos\frac{a}{k},$$

$$\cos\frac{b}{k} = \frac{\cos C}{\sin A}\cos\frac{a}{k}.$$

On a de même

$$\cos\frac{b}{k} = \frac{\cos A}{\sin C}\cos\frac{c}{k}.$$

C. q. f. d.

361. Théorème. *Lorsque dans un triangle* ABC *on a* $B = \frac{\pi}{2}$, $A < \frac{\pi}{2}$ *et* $C < \frac{\pi}{2}$, *on a toujours*

$$\cos\frac{b}{k} = \cos\frac{a}{k}\cos\frac{c}{k}.$$

Démonstration. Les hypothèses faites ici sur le triangle ABC sont les mêmes que celles faites au § 360. Tous les raisonnements que nous avons faits dans ce paragraphe restent valables ici. Refaisons les constructions que nous avons faites sur le triangle ABC dans le § 360, en employant les mêmes notations (fig. 5). Lorsque dans les raisonnements qui seront exposés dans la suite du présent paragraphe nous dirons que telle ou telle fonction tend vers telle ou telle limite sans dire pour quelle valeur de

la variable indépendante, il sera toujours sous-entendu « lorsque BB_1 tend vers zéro ».

CC_2 tend vers zéro (§ 360). Si donc BB_1 est assez petit, on pourra toujours trouver sur AC un point A_2 tel que A soit entre A_2 et C et que $AA_2 = CC_2$. Il y a entre A et C un point et un seul D tel que BD soit perpendiculaire à AC (§ 168). Il y a un point D_2 entre A_2 et D tel que $A_2D_2 = AD$. Si BB_1 est assez petit, A sera toujours entre A_2 et D_2, D_2 entre A et D et entre A_2 et C_2, et l'on a $\lim DD_2 = 0$. Si BB_1 est assez petit, on pourra toujours trouver sur la perpendiculaire élevée en D_2 à A_2C_2 dans le plan ABC un point B_2 situé du même côté de A_2C_2 que B et déterminant avec D_2 un segment congruent à (BD) (§ 328). On voit immédiatement que tous les éléments du triangle $A_2B_2C_2$ sont congruents chacun à chacun à ceux du triangle ABC.

Soit E un point fixe de BC tel que B soit entre E et C. On montre aisément au moyen du § 167 que B_2D_2 ne peut passer par aucun point de (BD). Il en résulte que DBB_2D_2 est un quadrilatère (§ 328). En tenant compte de ce fait, on voit aisément que A, B_2 et E sont situés du même côté de DB. On a $\sphericalangle DBA < \frac{\pi}{2}$, $\lim \sphericalangle DBB_2 = \frac{\pi}{2}$ (§ 329), $\sphericalangle DBE > \frac{\pi}{2}$. Si BB_1 est assez petit, $|BB_2$ sera donc toujours entre $|BA$ et $|BE$, et B_2 sera toujours intérieur à l'angle $\sphericalangle ABE$.

Soit O le milieu de (AA_2). En raisonnant comme nous l'avons fait au § 360, on trouve qu'il y a un point P_1 et un seul entre A_2 et B_2 tel que OP_1 soit perpendiculaire à A_2B_2. On a $\lim OA_2 = 0$ et par conséquent $\lim A_2P_1 = 0$ (§ 172) ; si donc BB_1 est assez petit, il existe sur $|AA_1$ un point P tel que $AP = A_2P_1$. Les éléments du triangle PAO sont congruents chacun à chacun à ceux du triangle P_1A_2O et $\sphericalangle OPA$ est droit. P, O et P_1 sont en ligne droite et O est entre P et P_1.

Les droites AB et C_2B_2 se coupent en un point F situé entre C_2 et B_2 et entre A et B. On voit de plus aisément que les couples de points F et B_2, B_2 et P_1, P_1 et P, P et F sont respectivement du même côté des droites P_1P, PF, FB_2, B_2P_1 et que par conséquent FB_2P_1P est un quadrilatère.

Comme $\lim PP_1 = 0$ et $\lim P_1B_2 = c$, on trouve, en appliquant le § 340 au quadrilatère trirectangle FB_2P_1P, que $\lim FB_2 = 0$. On a $\lim BB_2 = 0$ (§ 329) et donc $\lim FB = 0$ (§ 157), d'où il suit $\lim B_1F = 0$.

Si l'on avait $C_2F < C_2B_1$, $\sphericalangle C_2FB_1$ serait obtus (§ 155), il y aurait entre C_2 et B_1 un point X tel que $\sphericalangle XFB_1$ soit droit et $\sphericalangle XAB_1$ serait alors aussi droit (§ 167), ce qui est impossible. On ne peut pas non plus avoir $C_2F = C_2B_1$. On a donc $C_2F > C_2B_1$.

Il est possible de prendre le point fixe E de telle façon que C_2B_1 ne passe jamais par un point de (BE), quelle que soit la valeur de BB_1 (§ 167); choisissons E de cette façon. On a $\lim \sphericalangle EA_2C_2 = \sphericalangle EAC_2$ (§ 165) $>$ A; si donc BB_1 est assez petit, $|A_2B_2$ sera entre $|A_2C_2$ et $|A_2E$ et passera par un point J situé sur EC entre E et C. C_2B_1 ne passe par aucun point de (CB) ni par aucun point de (BE); C_2B_1 ne passe donc par aucun point de (CE) et donc par aucun point de (CJ). Par la considération de la droite C_2B_1 et du triangle A_2CJ on voit alors immédiatement que si BB_1 est assez petit, C_2B_1 passe toujours par un point G situé sur A_2J entre A_2 et J. G est sur $|C_2B_1$. $\text{Lim} \sphericalangle GC_2A_2 = \lim \sphericalangle B_1C_2A_2 = C = \sphericalangle A_2C_2B_2$; on a donc $\lim \sphericalangle GC_2B_2 = 0$. De là on déduit aisément $\lim GB_2 = 0$. Si donc BB_1 est assez petit, G et B_2 seront toujours situés du même côté de P_1. En raisonnant comme nous l'avons fait pour établir $C_2F > C_2B_1$, on trouve aisément $C_2G > C_2B_2$. On en déduit aisément que B_1 est entre C_2 et G. On voit de plus aisément que PB_1GP_1 est un quadrilatère.

Il y a un point H sur C_2G entre C_2 et G tel que $C_2H = C_2B_2$. H est entre G et B_1, car $C_2H > C_2B_1$. Au

moyen du § 169, on voit aisément qu'il y aura un point I entre P et P_1 tel que IH soit perpendiculaire à PP_1. PB_1HI est un quadrilatère.

Maintenant nous disposons de tous les éléments nécessaires pour établir la formule proposée. Nous avons

$$(1) \qquad \lim \frac{C_1C_3}{C_1C_2} = \lim \frac{CC_1}{CC_2} = \text{nombre fini} \neq 0 \quad (\S\ 360),$$

$$\lim \frac{NN_1}{AA_1} = \sin A \quad (\S\ 360),$$

$$\lim \frac{PP_1}{AA_2} = \lim \frac{OP_1}{OA_2} = \sin A \quad (\S\ 358),$$

$$(2) \qquad \lim \frac{NN_1}{AA_1} = \lim \frac{PP_1}{AA_2} = \text{nombre fini} \neq 0.$$

En divisant membre à membre (1) et (2), on trouve

$$\frac{\lim \frac{C_1C_3}{C_1C_2}}{\lim \frac{NN_1}{AA_1}} = \frac{\lim \frac{CC_1}{CC_2}}{\lim \frac{PP_1}{AA_2}},$$

$$\lim \frac{\frac{C_1C_3}{C_1C_2}}{\frac{NN_1}{AA_1}} = \lim \frac{\frac{CC_1}{CC_2}}{\frac{PP_1}{AA_2}} = \lim \frac{CC_1}{PP_1},$$

$$\lim \left(\frac{C_1C_3}{NN_1} \cdot \frac{AA_1}{C_1C_2} \right) = \lim \frac{CC_1}{PP_1}.$$

Or,

$$\lim \frac{C_1C_3}{NN_1} = \cos \frac{b}{k} (\S\ 360) = \text{nombre fini} \neq 0 \ (\S\ 337).$$

De là il suit

$$\lim \frac{AA_1}{C_1C_2} = \text{nombre fini} \neq 0$$

et

$$\cos \frac{b}{k} \cdot \lim \frac{AA_1}{C_1C_2} = \lim \frac{CC_1}{PP_1}.$$

On a donc

$$\cos\frac{b}{k}=\frac{\lim\frac{CC_1}{PP_1}}{\lim\frac{AA_1}{C_1C_2}}=\lim\frac{\frac{CC_1}{PP_1}}{\frac{AA_1}{C_1C_2}}=\lim\left(\frac{CC_1}{AA_1}\cdot\frac{C_1C_2}{PP_1}\right).$$

Or,

$$\lim\frac{CC_1}{AA_1}=\lim\frac{CC_1}{BB_1}=\cos\frac{a}{k}\,(\S\,360)=\text{nombre fini}\neq 0\;(\S\,337).$$

Il en résulte que $\lim\frac{C_1C_2}{PP_1}$ est fini et que

$$(3)\qquad \cos\frac{b}{k}=\cos\frac{a}{k}\cdot\lim\frac{C_1C_2}{PP_1}.$$

On a ensuite

$$C_1C_2=C_1B_1-C_2B_1>C_1B_1-C_2F=C_2B_2-C_2F=FB_2,$$

$$\frac{C_1C_2}{PP_1}>\frac{FB_2}{PP_1}.$$

Dans le quadrilatère trirectangle PFB_2P_1 on a d'après les raisonnements précédents $\lim P_1B_2=c$ et donc, d'après le § 340,

$$\lim\frac{FB_2}{PP_1}=\cos\frac{c}{k}.$$

On a donc

$$(4)\qquad \lim\frac{C_1C_2}{PP_1}\geqslant\cos\frac{c}{k}.$$

On a ensuite

$$C_1C_2=C_1B_1-C_2B_1=C_2H-C_2B_1=B_1H,$$

$$PP_1>PI,$$

$$\frac{C_1C_2}{PP_1}<\frac{B_1H}{PI}.$$

D'après ce qui a été vu plus haut, on a $\lim PB_1=c$, et en appliquant le § 340 au quadrilatère trirectangle B_1HIP on trouve

$$\lim\frac{B_1H}{PI}=\cos\frac{c}{k}.$$

On a donc

(5) $$\lim \frac{C_1C_2}{PP_1} < \cos\frac{c}{k}.$$

De (4) et (5) il suit

$$\lim \frac{C_1C_2}{PP_1} = \cos\frac{c}{k},$$

et (3) donne alors

$$\cos\frac{b}{k} = \cos\frac{a}{k}\cos\frac{c}{k}.$$

C. q. f. d.(1)

362. Théorème. *Lorsque dans un triangle* ABC *on a* $B=\frac{\pi}{2}$, $A<\frac{\pi}{2}$ *et* $C<\frac{\pi}{2}$, *on a toujours* $\sin\frac{a}{k}=\sin\frac{b}{k}\sin A$ *et* $\sin\frac{c}{k}=\sin\frac{b}{k}\sin C$.

Démonstration. D'après les §§ 360 et 361 on a

$$\sin^2\frac{b}{k} = 1-\cos^2\frac{b}{k},$$

$$\sin^2\frac{b}{k} = 1-\cos^2\frac{a}{k}\frac{\cos^2 C}{\sin^2 A} = 1-\cos^2\frac{a}{k}\,\frac{1-\sin^2 C}{\sin^2 A},$$

$$\sin^2\frac{b}{k} = 1-\cos^2\frac{a}{k}\,\frac{1-\dfrac{\cos^2 A}{\cos^2\frac{a}{k}}}{\sin^2 A},$$

$$\sin^2\frac{b}{k} = \frac{\sin^2 A-\cos^2\frac{a}{k}+\cos^2 A}{\sin^2 A} = \frac{\sin^2\frac{a}{k}}{\sin^2 A}.$$

Comme $\sin\frac{b}{k}$ et $\sin\frac{a}{k}$ sont des nombres positifs ou bien des

(1) La méthode que nous venons de suivre dans la démonstration de cette formule est empruntée à Gérard (voir Gérard : « Sur la géométrie non euclidienne », Nouvelles annales de mathématiques, 3e série, t. 12 ; 1893), mais Gérard a seulement envisagé l'hypothèse de l'angle aigu. Paul Mansion a montré que cette méthode de démonstration peut encore être employée dans l'hypothèse de l'angle obtus (voir Paul Mansion : « Essai d'exposition élémentaire des principes fondamentaux de la géométrie non euclidiennne de Riemann », Mathesis, 2e série, t. 5, supplément ; 1895.)

nombres obtenus en multipliant $+\sqrt{-1}$ par des nombres positifs [voir formule (4), § 341] et comme sin A est positif, on a

$$\sin\frac{a}{k}=\sin\frac{b}{k}\sin A$$

et de la même façon

$$\sin\frac{c}{k}=\sin\frac{b}{k}\sin C.$$

C. q. f. d.

363. Théorème. *Lorsque dans un triangle* ABC *on a* $A=B=\frac{\pi}{2}$, *on a toujours* $C=\frac{c}{k}$.

Démonstration. L'éventualité supposée dans l'énoncé ne pouvant se présenter que dans l'hypothèse de l'angle obtus, il faut se placer dans cette hypothèse pour démontrer le théorème.

Supposons d'abord $C<\frac{\pi}{2}$. Soit B′ un point situé entre C et B. Elevons la perpendiculaire en B′ à CB dans le plan ACB. Elle passera par un point A′ situé entre A et C et ABB′A′ est un quadrilatère trirectangle. On a

$$\text{(1)}\qquad \lim_{BB'\gtrless 0}\frac{AA'}{BB'}=\cos\frac{c}{k}.$$

Si BB′ est assez petit, on peut trouver un point B″ sur BC tel que C est entre B et B″ et que CB″ = BB′ et l'on peut aussi trouver un point A″ sur AC tel que C est entre A et A″ et que CA″ = AA′. On a

$$\text{(2)}\qquad \frac{AA'}{BB'}=\frac{CA''}{CB''}.$$

Menons B″A″ et A′B″. Dans le triangle A′B′B″ on a

$$\sphericalangle A'B'B''=\frac{\pi}{2},$$

$$\frac{B'B''}{k}=\frac{BC}{k}=\frac{\pi}{2}\ (\S\ 344).$$

On a donc, encore d'après le § 344,

$$\frac{A'B''}{k}=\frac{\pi}{2}=\frac{AC}{k}=\frac{A'A''}{k}.$$

On en déduit aisément que A′B″ et A′A″ sont perpendiculaires à B″A″ (1). On a donc

$$\sphericalangle CA''B'' = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{(3)} \qquad \lim_{BB' \gtrless 0} \frac{CA''}{CB''} = \cos C.$$

De (1), (2) et (3) on déduit

$$\cos\frac{c}{k} = \cos C,$$

$$\frac{c}{k} = C.$$

Si maintenant C est droit ou obtus, on partage le triangle ABC en deux autres triangles par la droite qui joint C au milieu de (AB). En appliquant le résultat qui vient d'être obtenu aux deux triangles partiels, on retrouve

$$\frac{c}{k} = C.$$

Le théorème est ainsi démontré dans tous les cas.

364. Théorème. *Dans tout triangle* ABC *où l'on a* $B = \frac{\pi}{2}$, *on a* $\cos C = \sin A \cos\frac{c}{k}$, $\cos A = \sin C \cos\frac{a}{k}$, $\cos\frac{b}{k} = \cos\frac{a}{k}\cos\frac{c}{k}$, $\sin\frac{c}{k} = \sin\frac{b}{k}\sin C$, $\sin\frac{a}{k} = \sin\frac{b}{k}\sin A$.

Démonstration. Ces formules ont été établies dans les §§ 360, 361 et 362 moyennant l'hypothèse

$$A < \frac{\pi}{2}, \quad C < \frac{\pi}{2}.$$

(1) En effet. $\sphericalangle$ A′A″B″ ne peut être obtus (§ 344). Si cet angle n'était pas droit, il serait donc aigu ; soit M le milieu de (A″B″) ; $\sphericalangle$ MA′A″ est congruent à $\frac{1}{2}$ $\sphericalangle$ B″A′A″ et est donc aigu ; $\sphericalangle$ A′MA″ est droit ; (A′A″) serait donc l'hypothénuse d'un triangle rectangle où deux angles sont aigus ; $\varphi(x)$ (voir § 336) serait donc défini pour $x =$ A′A″ (§ 360, démonstr.), ce qui est impossible. $\sphericalangle$ A′A″B″ est donc droit. De même, $\sphericalangle$ A′B″A″ est droit.

Si cette hypothèse n'est pas réalisée, on se trouve nécessairement dans l'hypothèse de l'angle obtus.

Lorsque $A = \frac{\pi}{2}$ ou $C = \frac{\pi}{2}$, on voit immédiatement en tenant compte des §§ 344 et 363 que les formules à démontrer sont exactes.

Supposons ensuite

$$A > \frac{\pi}{2}, \quad C < \frac{\pi}{2}.$$

Il existe alors un point D entre B et C tel que

$$\sphericalangle BAD = \frac{\pi}{2}.$$

On a

$$\frac{AB}{k} < \frac{\pi}{2} \text{ (§ 344)},$$

$$\sphericalangle ADB < \frac{\pi}{2},$$

$$AC > AD.$$

Il y a un point D_1 entre A et C tel que $AD_1 = AD$. On a

$$\frac{AD_1}{k} = \frac{AD}{k} = \frac{BD}{k} = \frac{\pi}{2},$$

$$\sphericalangle AD_1D = \sphericalangle ADD_1 = \frac{\pi}{2} \text{ (§ 363, démonstration)},$$

$$\sphericalangle D_1DC < \frac{\pi}{2}.$$

Nous pouvons donc appliquer les formules des §§ 360, 361 et 362 au triangle CDD_1 et nous obtenons

$$\cos C = \sin \sphericalangle D_1DC \cos \frac{DD_1}{k},$$

$$\cos \sphericalangle D_1DC = \sin C \cos \frac{CD_1}{k},$$

$$\cos \frac{CD}{k} = \cos \frac{CD_1}{k} \cos \frac{DD_1}{k},$$

$$\sin \frac{CD_1}{k} = \sin \frac{CD}{k} \sin \sphericalangle D_1DC,$$

$$\sin \frac{DD_1}{k} = \sin \frac{CD}{k} \sin C,$$

ou bien

$$\cos C = \cos \sphericalangle ADB \cos \frac{DD_1}{k},$$

$$\sin \sphericalangle ADB = \sin C \sin \frac{b}{k},$$

$$\sin \frac{a}{k} = \sin \frac{b}{k} \cos \frac{DD_1}{k},$$

$$\cos \frac{b}{k} = \cos \frac{a}{k} \cos \sphericalangle ADB,$$

$$\sin \frac{DD_1}{k} = - \cos \frac{a}{k} \sin C.$$

En tenant compte du § 363 et de ce que $\sphericalangle DAD_1 = A - \frac{\pi}{2}$, on trouve

$$\cos C = \cos \frac{c}{k} \sin A,$$

$$\sin \frac{c}{k} = \sin C \sin \frac{b}{k},$$

$$\sin \frac{a}{k} = \sin \frac{b}{k} \sin A,$$

$$\cos \frac{b}{k} = \cos \frac{a}{k} \cos \frac{c}{k},$$

$$\cos A = \cos \frac{a}{k} \sin C.$$

C. q. f. d.

Supposons enfin

$$A > \frac{\pi}{2}, \quad C > \frac{\pi}{2}.$$

Il existe alors un point D entre C et B tel que AD est perpendiculaire à AB et un point E entre A et B tel que CE est perpendiculaire à BC. Menons DE. On aura

$$\frac{DB}{k} = \frac{DA}{k} = \frac{EC}{k} = \frac{EB}{k} = \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{DE}{k} = \frac{\pi}{2},$$

$$\sphericalangle BDE = \sphericalangle BED = \frac{\pi}{2},$$

$$CD < DB, \quad EA < EB.$$

Il y a un point C′ entre B et D tel que CD = C′D et un point A′ entre B et E tel que AE = A′E. On a

$$C = \sphericalangle DC'A', \quad A = \sphericalangle EA'C', \quad b = C'A',$$

$$\sphericalangle BC'A' < \frac{\pi}{2}, \quad \sphericalangle BA'C' < \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{BC'}{k} + \frac{a}{k} = \frac{BA'}{k} + \frac{c}{k} = \pi.$$

En appliquant les formules des §§ 360, 361 et 362 au triangle A′BC′, on trouve

$$\cos \sphericalangle C'A'B = \sin \sphericalangle A'C'B \cos \frac{BC'}{k},$$

$$\cos \frac{A'C'}{k} = \cos \frac{A'B}{k} \cos \frac{C'B}{k},$$

$$\sin \frac{BC'}{k} = \sin \frac{A'C'}{k} \sin \sphericalangle C'A'B,$$

ou bien

(1) $$\cos A = \sin C \cos \frac{a}{k},$$

$$\cos \frac{b}{k} = \cos \frac{c}{k} \cos \frac{a}{k},$$

(2) $$\sin \frac{a}{k} = \sin \frac{b}{k} \sin A.$$

On montre exactement de la même façon qu'on a des valeurs analogues à celles données par (1) et (2) pour $\cos C$ et $\sin \frac{c}{k}$.

Le théorème est ainsi complètement établi.

365. Théorème. *Si dans un triangle* ABC *on a* $B = \frac{\pi}{2}$, $A \neq \frac{\pi}{2}$, $C \neq \frac{\pi}{2}$, *on a toujours* $\operatorname{tg} \frac{a}{k} = \operatorname{tg} \frac{b}{k} \cos C$, $\operatorname{tg} \frac{c}{k} = \operatorname{tg} \frac{b}{k} \cos A$.

Démonstration. Rappelons d'abord la définition de la fonction $\operatorname{tg} z$ lorsque la variable z est complexe. Lorsque z est réel, on a $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$. Lorsque z est complexe,

on écrit encore, par définition,

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}.$$

Les fonctions $\sin z$ et $\cos z$ étant définies lorsque z est complexe, la fonction $\operatorname{tg} z$ le sera aussi.

On a maintenant d'après le § 364

$$\cos C = \sin A \cos \frac{c}{k},$$

$$\cos \frac{b}{k} = \cos \frac{c}{k} \cos \frac{a}{k},$$

$$\sin \frac{a}{k} = \sin \frac{b}{k} \sin A.$$

De ces formules on déduit

$$\cos C = \frac{\sin \frac{a}{k}}{\sin \frac{b}{k}} \cos \frac{c}{k} = \frac{\sin \frac{a}{k}}{\sin \frac{b}{k}} \frac{\cos \frac{b}{k}}{\cos \frac{a}{k}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{a}{k} = \operatorname{tg} \frac{b}{k} \cos C.$$

On trouve de la même manière

$$\operatorname{tg} \frac{c}{k} = \operatorname{tg} \frac{b}{k} \cos A.$$

C. q. f. d.

366. Théorème. *Etant donné un triangle quelconque* ABC, *on a pour un côté quelconque,* (AC) *par exemple, de ce triangle la formule*

$$\cos \frac{b}{k} = \cos \frac{a}{k} \cos \frac{c}{k} + \sin \frac{a}{k} \sin \frac{c}{k} \cos B.$$

Démonstration.

1°) On a $B < \frac{\pi}{2}$ et $C < \frac{\pi}{2}$, ou bien aussi $B \geqslant \frac{\pi}{2}$ et $C \geqslant \frac{\pi}{2}$.

Alors il existe un point D sur (BC) tel que AD est perpendiculaire à BC (§ 168). D'après les §§ 364 et 365 on

a (sauf si $\frac{BD}{k} = \frac{\pi}{2}$, cas aisé à traiter)

$$\cos\frac{b}{k} = \cos\frac{DC}{k}\frac{\cos\frac{c}{k}}{\cos\frac{BD}{k}} = \frac{\cos\frac{c}{k}}{\cos\frac{BD}{k}}\cos\left(\frac{a}{k} - \frac{BD}{k}\right)$$

$$= \frac{\cos\frac{c}{k}}{\cos\frac{BD}{k}}\left(\cos\frac{a}{k}\cos\frac{BD}{k} + \sin\frac{a}{k}\sin\frac{BD}{k}\right)$$

$$= \cos\frac{a}{k}\cos\frac{c}{k} + \sin\frac{a}{k}\,\mathrm{tg}\,\frac{BD}{k}\cos\frac{c}{k}$$

$$= \cos\frac{a}{k}\cos\frac{c}{k} + \sin\frac{a}{k}\sin\frac{c}{k}\cos B.$$

C. q. f. d.

2°) On a $B < \frac{\pi}{2}$ et $A < \frac{\pi}{2}$, ou bien aussi $B \geqslant \frac{\pi}{2}$ et $A \geqslant \frac{\pi}{2}$. Ce cas se traite exactement de la même manière que le 1°.

3°) On ne se trouve ni dans le 1° ni dans le 2°.

Alors A et C sont tous les deux inférieurs à $\frac{\pi}{2}$ ou tous les deux supérieurs à $\frac{\pi}{2}$. Il y a un point E entre A et C tel que BE est perpendiculaire à AC. Posons

$$AE = a', \quad CE = c', \quad BE = b',$$
$$\sphericalangle ABE = A', \quad \sphericalangle CBE = C'.$$

On a en général (exceptions aisées à traiter)

$$\cos B = \cos(A' + C') = \cos A' \cos C' - \sin A' \sin C'$$

$$= \frac{\mathrm{tg}^2\frac{b'}{k}}{\mathrm{tg}\frac{a}{k}\,\mathrm{tg}\frac{c}{k}} - \frac{\sin\frac{a'}{k}\sin\frac{c'}{k}}{\sin\frac{a}{k}\sin\frac{c}{k}}$$

$$= \frac{\mathrm{tg}^2\frac{b'}{k}\cos\frac{a}{k}\cos\frac{c}{k} - \sin\frac{a'}{k}\sin\frac{c'}{k}}{\sin\frac{a}{k}\sin\frac{c}{k}}$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{b'}{k} \cos^2 \frac{b'}{k} \cos \frac{a'}{k} \cos \frac{c'}{k} - \sin \frac{a'}{k} \sin \frac{c'}{k}}{\sin \frac{a}{k} \sin \frac{c}{k}}$$

$$= \frac{\left(1 - \cos^2 \frac{b'}{k}\right) \cos \frac{a'}{k} \cos \frac{c'}{k} - \sin \frac{a'}{k} \sin \frac{c'}{k}}{\sin \frac{a}{k} \sin \frac{c}{k}}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{a'}{k} + \frac{c'}{k}\right) - \cos^2 \frac{b'}{k} \cos \frac{a'}{k} \cos \frac{c'}{k}}{\sin \frac{a}{k} \sin \frac{c}{k}} = \frac{\cos \frac{b}{k} - \cos \frac{a}{k} \cos \frac{c}{k}}{\sin \frac{a}{k} \sin \frac{c}{k}},$$

ou bien

$$\cos \frac{b}{k} = \cos \frac{a}{k} \cos \frac{c}{k} + \sin \frac{a}{k} \sin \frac{c}{k} \cos B.$$

C. q. f. d.

367. Théorème. *Dans l'hypothèse de l'angle droit, les 6 nombres* a, b, c, A, B, C *relatifs à un triangle quelconque* ABC *satisfont à toutes les relations qui existent entre les mesures des côtés et des angles d'un triangle quelconque dans la géométrie euclidienne, les mesures des angles étant prises avec le radian comme unité.*

Démonstration. La géométrie générale dans l'hypothèse de l'angle droit et la géométrie euclidienne ne diffèrent presque pas l'une de l'autre et ce théorème pourrait sembler évident a priori. Cependant il ne l'est pas, car pour établir les formules de la trigonométrie plane euclidienne on se base parfois sur le postulat III 1 du § 3 et il n'est pas sûr a priori qu'on pourrait s'en passer. Il est donc nécessaire de démontrer le théorème énoncé.

Soit $A'B'C'$ un triangle quelconque où l'on a $B' = \frac{\pi}{2}$. Alors nous aurons

$$(1) \qquad A' + C' = \frac{\pi}{2}.$$

Nous avons vu au § 352 que dans l'hypothèse de l'angle

droit $\frac{A'B'}{A'C'}$ resterait constant si $A'B'$ variait. Or, n'importe dans laquelle des trois hypothèses on se place, on a

$$\lim_{A'B' \gtrless 0} \frac{A'B'}{A'C'} = \cos A'.$$

Nous avons donc actuellement

$$\frac{A'B'}{A'C'} = \cos A'$$

ou

(2) $$c' = b' \cos A'.$$

Nous avons de même

(3) $$a' = b' \cos C'.$$

Soit maintenant ABC un triangle quelconque. Nous avons

(4) $$A + B + C = \pi.$$

Deux au moins des quantités A, B et C sont inférieures à $\frac{\pi}{2}$. Supposons pour fixer les idées $A < \frac{\pi}{2}$ et $B < \frac{\pi}{2}$. Il y a un point D entre A et B tel que CD est perpendiculaire à AB. On trouve aisément au moyen de (1), (2) et (3) qu'on a

(5) $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

On a ensuite

$$\begin{aligned}\sin C &= \sin \sphericalangle ACD \cos \sphericalangle BCD + \sin \sphericalangle BCD \cos \sphericalangle ACD \\ &= \frac{AD}{b} \cdot \frac{CD}{a} + \frac{DB}{a} \cdot \frac{CD}{b} \\ &= \frac{c \, . \, CD}{ab} \\ &= \frac{c}{ab} b \sin A,\end{aligned}$$

ou bien

(6) $$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}.$$

Soient maintenant a_1, b_1, c_1, A_1, B_1, C_1 les mesures des côtés et des angles d'un triangle quelconque dans l'espace euclidien. les trois dernières mesures étant prises avec le radian comme unité, et soit

$$(7) \qquad f(a_1, b_1, c_1, A_1, B_1, C_1) = 0$$

une relation qui est satisfaite pour tout triangle pareil. Supposons maintenant qu'il existe un système de 6 nombres positifs a, b, c, A, B, C satisfaisant aux relations (4), (5) et (6), mais tels que l'on ait $f(a, b, c, A, B, C) \neq 0$. Le fait que a, b, c, A, B, C sont positifs et satisfont à (4), (5) et (6) permet d'affirmer qu'il résulte des postulats euclidiens qu'il existe des triangles pour lesquels on a $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$, $A_1 = A$, $B_1 = B$, $C_1 = C$; cela se voit aisément par la trigonométrie euclidienne. Et comme $f(a, b, c, A, B, C) \neq 0$, il résulte des postulats euclidiens que (7) n'est pas satisfait pour tous les triangles. D'autre part, il résulte par hypothèse des mêmes postulats que (7) est satisfait pour tous les triangles. On arrive donc à une contradiction dans la géométrie euclidienne, ce qui est impossible. Donc, tout système de 6 nombres positifs satisfaisant à (4), (5) et (6) satisfait à (7). (7) a donc lieu pour tout triangle dans l'hypothèse de l'angle droit dans la géométrie générale.

C. q. f. d.

368. Théorème. *Dans l'hypothèse de l'angle obtus, les 6 nombres* $\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}$, A, B, C *relatifs à un triangle quelconque* ABC *satisfont à toutes les relations qui existent entre les mesures des côtés et des angles d'un triangle sphérique convexe quelconque dans l'espace euclidien, ces mesures étant prises avec le radian comme unité.*

Démonstration. Supposons donné un triangle quelconque ABC dans la géométrie générale dans l'hypothèse de l'angle obtus. Les 6 nombres $\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}$, A, B, C y relatifs

satisfont aux relations et inégalités suivantes :

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
\cos\frac{a}{k} &= \cos\frac{b}{k}\cos\frac{c}{k} + \sin\frac{b}{k}\sin\frac{c}{k}\cos A,\\
\cos\frac{b}{k} &= \cos\frac{a}{k}\cos\frac{c}{k} + \sin\frac{a}{k}\sin\frac{c}{k}\cos B,\\
\cos\frac{c}{k} &= \cos\frac{a}{k}\cos\frac{b}{k} + \sin\frac{a}{k}\sin\frac{b}{k}\cos C,
\end{aligned}\right\} \text{(§ 366)}\\
&0 < \frac{a}{k} < \pi,\quad 0 < \frac{b}{k} < \pi,\quad 0 < \frac{c}{k} < \pi \quad \text{(§ 342)},\\
&0 < A < \pi,\quad 0 < B < \pi,\quad 0 < C < \pi.
\end{aligned}
\right.
$$

Au moyen de la trigonométrie sphérique euclidienne on voit aisément que la proposition suivante résulte des postulats euclidiens : « étant donnés 6 nombres réels quelconques satisfaisant à (1), il existe des triangles sphériques convexes dans lesquels les mesures des côtés et des angles avec le radian comme unité sont respectivement égales à ces 6 nombres. » Cela étant, la démonstration se fait en raisonnant comme nous l'avons fait à la fin du § 367.

368bis. Théorème. *Dans l'hypothèse de l'angle aigu, les 6 nombres* $\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}$, A, B, C *relatifs à un triangle quelconque* ABC *satisfont aux relations suivantes, qui existent entre les mesures* a_1, b_1, c_1, A_1, B_1, C_1 *des côtés et des angles d'un triangle sphérique convexe quelconque* $A_1B_1C_1$ *dans l'espace euclidien, ces mesures étant prises avec le radian comme unité :*

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\sin a_1}{\sin A_1} = \frac{\sin b_1}{\sin B_1} = \frac{\sin c_1}{\sin C_1},\\
&\cos A_1 = -\cos B_1 \cos C_1 + \sin B_1 \sin C_1 \cos a_1\\
&\textit{et deux relations analogues},\\
&\cot a_1 \sin b_1 = \cos b_1 \cos C_1 + \sin C_1 \cot A_1\\
&\textit{et cinq relations analogues}.
\end{aligned}
\right.
$$

Démonstration. D'après la trigonométrie sphérique euclidienne, on a

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
\cos a_1 &= \cos b_1 \cos c_1 + \sin b_1 \sin c_1 \cos A_1,\\
\cos b_1 &= \cos a_1 \cos c_1 + \sin a_1 \sin c_1 \cos B_1,\\
\cos c_1 &= \cos a_1 \cos b_1 + \sin a_1 \sin b_1 \cos C_1.
\end{aligned}
\right.
$$

Dans la trigonométrie sphérique euclidienne, on voit comment on peut déduire (1) de (2) par des raisonnements composés de deux parties, à savoir :

1°) Des calculs pour la validité desquels il suffit de supposer qu'on a (2), sans faire aucune autre hypothèse sur les nombres a_1, b_1, c_1, A_1, B_1, C_1.

2°) Des discussions de signe où l'on se base sur les inégalités $0 < a_1 < \pi$, $0 < b_1 < \pi$, $0 < c_1 < \pi$, $0 < A_1 < \pi$, $0 < B_1 < \pi$, $0 < C_1 < \pi$.

D'après le § 366, (2) reste valable quand on y remplace $a_1, b_1, c_1, A_1, B_1, C_1$ respectivement par $\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}$, A, B, C. Les calculs mentionnés sous le 1° restent aussi valables quand on effectue la même substitution. Et quand on effectue cette substitution, le résultat des discussions mentionnées sous le 2° n'est pas altéré. On établit ce point avec la plus grande facilité en refaisant les discussions en question, en remarquant que les nombres $\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}$ sont chacun le produit de $+\sqrt{-1}$ par un coefficient positif et en se basant sur (4), § 341. Il résulte de tout cela que (1) reste valable quand on y remplace $a_1, b_1, c_1, A_1, B_1, C_1$ respectivement par $\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}$, A, B, C.

C. q. f. d.

Remarque. Un grand nombre des formules figurant dans les traités de trigonométrie sphérique peuvent être établies pour les triangles rectilignes dans l'hypothèse de l'angle aigu par des raisonnements analogues à celui que nous venons de faire. Cependant, le théorème du § 368 est faux dans l'hypothèse de l'angle aigu ; alors, en effet, le domaine de variation des variables a_1, b_1, c_1, A_1, B_1, C_1 ne contient pas celui des variables $\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}$, A, B, C; on peut donc d'autant de manières qu'on veut définir une fonction nulle pour tous les systèmes de valeurs des 6 premières variables et différente de zéro pour certains systèmes de valeurs des 6 dernières. Lors-

qu'on cherche à définir parmi toutes les relations valables pour les triangles sphériques euclidiens des classes de relations qui soient aussi valables pour les triangles rectilignes dans l'hypothèse de l'angle aigu, on est amené à des questions d'analyse qui tombent en dehors du cadre de ce travail.

369. Nous avons maintenant édifié complètement la trigonométrie de la géométrie générale. Mais avant de quitter ce chapitre, nous voulons revenir à la question que nous avons abordée une première fois au § 325.

Plaçons-nous dans l'hypothèse de l'angle aigu ou dans celle de l'angle obtus et considérons de nouveau un tétraèdre $OA_1B_1C_1$. Laissons le point O et les semi-droites $|OA_1$, $|OB_1$, $|OC_1$ fixes. Soit ABC un triangle quelconque dont les trois sommets sont intérieurs au tétraèdre $OA_1B_1C_1$. Nous avons (§§ 368 et 368[bis])

$$\text{(1)} \qquad \frac{\sin\frac{a}{k}}{\sin A} = \frac{\sin\frac{b}{k}}{\sin B} = \frac{\sin\frac{c}{k}}{\sin C}.$$

Donnons-nous un nombre positif α arbitrairement petit. Il existe un nombre positif β suffisamment petit pour que l'on ait

$$\text{(2)} \qquad \left| \frac{\frac{b'}{k} : \sin\frac{b'}{k}}{\frac{a'}{k} : \sin\frac{a'}{k}} - 1 \right| < \alpha, \qquad \left| \frac{\frac{c'}{k} : \sin\frac{c'}{k}}{\frac{a'}{k} : \sin\frac{a'}{k}} - 1 \right| < \alpha$$

dès que a', b' et c' sont trois nombres positifs satisfaisant à

$$a' < \beta, \quad b' < \beta, \quad c' < \beta.$$

On peut trouver un nombre positif β_1 suffisamment petit pour que l'on ait

$$\text{(3)} \qquad a < \beta, \quad b < \beta, \quad c < \beta$$

dans tous les triangles ABC dès que

$$\text{(4)} \qquad OA_1 < \beta_1, \quad OB_1 < \beta_1, \quad OC_1 < \beta_1.$$

Choisissons les points A_1, B_1, et C_1 de manière que OA_1, OB_1 et OC_1 satisfassent à (4). Alors (3) aura lieu pour tous les triangles ABC. D'après (2) nous aurons dans tous ces triangles

$$\left| \frac{\frac{b}{k} : \sin \frac{b}{k}}{\frac{a}{k} : \sin \frac{a}{k}} - 1 \right| < \alpha, \quad \left| \frac{\frac{c}{k} : \sin \frac{c}{k}}{\frac{a}{k} : \sin \frac{a}{k}} - 1 \right| < \alpha,$$

ou

$$\left| \frac{b : \sin \frac{b}{k}}{a : \sin \frac{a}{k}} - 1 \right| < \alpha, \quad \left| \frac{c : \sin \frac{c}{k}}{a : \sin \frac{a}{k}} - 1 \right| < \alpha.$$

D'après (1) on a donc dans tous les triangles ABC

$$(5) \qquad \left| \frac{b : \sin B}{a : \sin A} - 1 \right| < \alpha, \quad \left| \frac{c : \sin C}{a : \sin A} - 1 \right| < \alpha.$$

Les rapports mutuels des quantités $\frac{a}{\sin A}$, $\frac{b}{\sin B}$ et $\frac{c}{\sin C}$ tendent donc uniformément vers l'unité lorsque OA_1, OB_1 et OC_1 tendent vers zéro. En d'autres mots, les rapports $\frac{a}{\sin A}$, $\frac{b}{\sin B}$ et $\frac{c}{\sin C}$, qui sont égaux dans l'hypothèse de l'angle droit, diffèrent entre eux de quantités infiniment petites relativement à leurs propres valeurs lorsqu'on se place dans l'hypothèse de l'angle aigu ou obtus et considère une région infiniment petite de l'espace.

En examinant les autres formules de la trigonométrie plane euclidienne, on arrive à des résultats analogues et l'on résume ces différents résultats en disant : *« si l'on se place dans l'hypothèse de l'angle aigu ou obtus, la trigonométrie basée sur l'hypothèse de l'angle droit est valable dans une région infiniment petite de l'espace. »* C'est là une nouvelle illustration de la règle que nous avons indiquée au § 325.

CHAPITRE XV.

Notions de géométrie analytique.

370. Conventions. Soient O un point fixe et P un point variable. Aussi longtemps que P est dinstinct de O, la quantité OP est parfaitement déterminée. Lorsque P au contraire coïncide avec O, le segment (OP) n'existe pas et la mesure du segment (OP) n'existe donc pas non plus; nous dirons dans ce cas par convention que la mesure du segment (OP) est nulle et nous écrirons

$$OP = 0.$$

Soient x une semi-droite fixe, O l'origine de x et s une semi-droite variable issue de O. Lorsque s ne coïncide ni avec x ni avec la semi-droite opposée à x, le nombre (x, s) est parfaitement déterminé. Lorsque s au contraire coïncide avec x ou avec la semi-droite opposée à x, l'angle (x, s) n'existe pas et la mesure de cet angle n'existe pas non plus. Nous dirons par convention que la mesure de l'angle (x, s) est égale à zéro si s coïncide avec x et est égale à π si s coïncide avec la semi-droite opposée à x; nous écrirons suivant le cas

$$(x, s) = 0 \quad \text{ou} \quad (x, s) = \pi.$$

Dans ce qui précède nous avons déjà implicitement fait ces conventions dans certains cas particuliers.

371. Définitions. Étant données deux semi-droites qui ont même support, on dit qu'elles sont de *même sens* s'il y a une semi-droite parmi les deux semi-droites données qui contient tous les points de l'autre. Si au contraire deux semi-droites de même support sont telles que sur chacune d'elles il y a des points qui n'appartiennent pas à l'autre, on dit qu'elles sont de *sens contraires* ou *opposés*.

Supposons données trois semi-droites ayant même support. On montre aisément que si deux d'entre elles sont toutes les deux de même sens que la troisième ou de sens opposé à celle-ci, qu'alors elles sont de même sens entre elles.

Supposons donnés deux points distincts A et B. Nous savons que les symboles (AB) et (BA) désignent exactement la même chose. Nous désignerons par le symbole $\overline{AB}$ le segment (AB) associé à l'extrémité A et par $\overline{BA}$ le même segment associé à l'extrémité B. Nous n'emploierons pas de terme spécial pour désigner un segment associé ainsi à l'une de ses extrémités ; nous garderons le terme segment et le contexte de même que les notations différentes (AB) et $\overline{AB}$ suffiront pour montrer dans chaque cas de quelle espèce de segment il s'agit.

Supposons donnés une droite d, une semi-droite x appartenant à d et deux points A et B appartenant aussi à d. Si A et B sont distincts, on entend par *valeur algébrique* du segment $\overline{AB}$ comptée suivant la semi-droite x le nombre AB multiplié par $+1$ ou par -1 suivant que les semi-droites |AB et x sont de même sens ou de sens contraires. Nous désignerons la valeur algébrique du segment $\overline{AB}$ par la notation $\overline{AB}$ même, ce qui ne donnera pas lieu à des ambiguités de quelque conséquence. Lorsque A et B coïncident, on écrit $\overline{AB}=0$ et $\overline{BA}=0$.

On a toujours

$$\overline{AB}+\overline{BA}=0.$$

Lorsqu'on remplace x par une semi-droite de même sens, $\overline{AB}$ ne change pas ; lorsqu'on remplace x par une semi-droite de sens contraire, $\overline{AB}$ change de signe. Enfin on montre aisément que si $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ sont n points appartenant à d, on a

$$(1) \qquad \overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\cdots+\overline{A_{n-1}A_n}+\overline{A_nA_1}=0.$$

372. Hypothèses. Depuis cet instant jusqu'à la fin de ce chapitre, nous exclurons l'hypothèse de l'angle droit. Nos développements embrasseront toutefois aussi bien l'hypothèse de l'angle aigu que celle de l'angle obtus.

Relativement à l'hypothèse de l'angle droit, on peut remarquer ce qui suit. Maintenant que nous savons que la trigonométrie euclidienne est valable dans la branche de la géométrie générale basée sur l'hypothèse de l'angle droit, nous pouvons édifier la géométrie analytique dans cette branche de la géométrie générale en apportant à la géométrie analytique euclidienne quelques modifications insignifiantes n'offrant pas la moindre difficulté. Nous ne nous arrêterons pas ici à ces modifications. De plus, on peut montrer aisément que les différentes formules de la géométrie analytique générale dans l'hypothèse de l'angle aigu ou obtus que nous établirons dans ce chapitre coïncident avec celles qui répondent à l'hypothèse de l'angle droit ou à la géométrie euclidienne à moins de quantités infiniment petites d'ordre supérieur, pourvu que l'on considère une région infiniment petite de l'espace.

373. Définitions. Considérons un point fixe O et trois semi-droites fixes issues de O qui sont perpendiculaires entre elles deux à deux. Soient | OX, | OY et | OZ ces trois semi-droites. Un tel groupe de trois semi-droites est appelé un *système d'axes coordonnés rectangulaires ;* les semi-droites sont les *axes coordonnés*, les plans OXY, OXZ et OYZ sont les *plans coordonnés* et le point O est l'*origine des coordonnées*.

Soit s une semi-droite quelconque issue de O. On appelle *cosinus directeurs* de s par rapport aux axes coordonnés OXYZ les trois quantités $\cos(|OX, s)$, $\cos(|OY, s)$ et $\cos(|OZ, s)$.

Étant donné un segment $\overline{AB}$ appartenant à l'une des droites OX, OY ou OZ, on compte toujours la valeur algébrique de $\overline{AB}$ suivant l'axe coordonné correspondant, à moins que l'on ne fasse une convention expresse à l'effet du contraire.

374. Théorème. *Si les cosinus directeurs par rapport aux axes rectangulaires* OXYZ *d'une semi-droite s issue de* O *sont* α, β *et* γ *et si ceux d'une semi-droite* s' *issue du même point sont* α', β' *et* γ', *on a*

$$\cos(s, s') = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'.$$

Démonstration. Convenons de compter les valeurs algébriques des segments appartenant aux supports de s ou de s' suivant s et s' respectivement.

Soit (fig. 6) P un point quelconque de s distinct de O. Si OP est assez petit, on peut trouver sur le support de s' un point P′ tel que PP′ est perpendiculaire à s'. Si OP est assez petit, nous pourrons trouver aussi des points P_z, A, B, C, P'_z, A′ satisfaisant aux conditions suivantes : P_z est dans le plan OXY et PP_z est perpendiculaire à ce plan ; A, B et C sont respectivement sur les droites OX, OY et OZ, P_zA est perpendiculaire à OX, P_zB à OY et PC à OZ ; P'_z et A′ sont sur le support de s' et $P_zP'_z$ ainsi que AA′ sont perpendiculaires à ce support. PA et PB seront perpendiculaires à OX et à OY respectivement (§ 71).

On a maintenant (§ 371)

$$(1) \qquad \overline{OP'} = \overline{OA'} + \overline{A'P'_z} + \overline{P'_zP'}.$$

Désignons par ε_1, ε_2, ... des quantités infiniment petites lorsque OP tend vers zéro. On déduit aisément des §§ 354 et 371 qu'on a

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = \cos(s, s') + \varepsilon_1,$$

ou bien

$$(2) \qquad \overline{OP'} = \overline{OP} \cos(s, s') + \varepsilon_1 \overline{OP},$$

et

$$(3) \qquad \overline{OA'} = \overline{OA}\,\alpha' + \overline{OA}\,\varepsilon_2.$$

Cherchons maintenant la valeur de $\overline{A'P'_z}$. Si OP est assez petit, on pourra trouver dans le plan déterminé par OY et par s' deux points A″ et P''_z (fig. 7) tels que AA″ et $P_zP''_z$ soient perpendiculaires à ce plan ; on pourra aussi abaisser de A″ la perpendiculaire sur OY ; la droite joignant A au pied de cette perpendiculaire sera perpendiculaire à OY. Comme AO est perpendiculaire à OY et comme OA est aussi petit qu'on veut, la première perpendiculaire à OY passant par A que nous venons d'obtenir doit coïncider avec AO et il en résulte que A″O

est perpendiculaire à OY. De même, P''_zB est perpendiculaire à OY. Menons $P''_zP'_z$ et $A''A'$. On voit en raisonnant encore de la même façon qu'il y a un instant que $P''_zP'_z$ et $A''A'$ sont perpendiculaires à s'.

BO est perpendiculaire au plan OAA''; le plan OAP_z passe par BO et est donc perpendiculaire au plan OAA'' (§ 77). AP_z est situé dans l'un de ces plans et est perpendiculaire à l'intersection des deux plans; AP_z est donc perpendiculaire à l'autre plan, c. à d. à OAA'' (§ 77); l'angle $\sphericalangle P_zAA''$ est donc droit. Le plan $P''_zA''A$ passe par P_zA, qui est perpendiculaire au plan $OA''A$; le plan $P''_zA''A$ est donc perpendiculaire au plan $OA''A$. $\sphericalangle OA''P''_z$ est un angle plan de l'un des angles dièdres formés par les plans $P''_zA''A$ et $OA''A$ et cet angle $\sphericalangle OA''P''_z$ est donc droit.

Soit Y' un point de $A''P''_z$ distinct de A'' tel que Y et Y' soient situés du même côté de OA''. Convenons de compter les valeurs algébriques des segments appartenant à $A''P''_z$ suivant $|A''Y'$. $OA''P''_zB$ est un quadrilatère trirectangle. Au moyen du § 340 on trouve

$$\overline{A''P''_z} = \overline{OB}\,(1 + \varepsilon_3). \tag{4}$$

En remarquant que OP'_z et $A'A''$ tendent vers zéro, on voit aisément qu'il existe toujours sur $P'_zP''_z$ un point Q tel que Q et A'' soient du même côté du support de s' et que $A'A'' = P'_zQ$. Soit R un point du support de s' distinct de A' et tel que $|A'R$ et s' soient de même sens. Soit T un point de $A''Q$ distinct de A'' et situé du même côté de $A''A'$ que R. Convenons de compter les valeurs algébriques des segments appartenant à $A''Q$ suivant $|A''T$. $A'P'_zQA''$ est un quadrilatère birectangle isoscèle et au moyen du § 339 on trouve

$$\overline{A'P'_z} = \overline{A''Q}\,(1 + \varepsilon_4). \tag{4'}$$

La droite OA'' est fixe et A'' reste toujours du même côté de O sur OA''. $(|OA'', s')$ est donc fixe. En considérant A' et A'', $|A'R$ et $|A''T$, O et s', on trouve que $|A''T$ et s' sont du même côté de OA'' et que

$$\lim \sphericalangle OA''T = \pi - (|OA'', s').$$

En se basant sur ce résultat, en considérant O et A'', $|A''T$ et s', ainsi que $|A''Y'$ et $|OY$, en distingant enfin les cas $(|OA'', s') < \frac{\pi}{2}$ et $(|OA'', s') > \frac{\pi}{2}$ ainsi que le cas où $|A''T$ et s' sont du même côté de OA'' que $|A''Y'$ et $|OY$, et le cas où $|A''T$ et s' sont du côté opposé à celui de $|A''Y'$ et de $|OY$ par rapport à OA'', on trouve

$$\lim (|A''Y', |A''T) = (|OY, s').$$

Comme $A''P''_z$ et $A''Q$ tendent vers zéro, on déduit de là que

$$(4'') \qquad \overline{A''Q} = \overline{A''P''_z}\,(\beta' + \varepsilon_5).$$

De (4), (4') et (4'') on déduit

$$(5) \qquad \overline{A'P'_z} = \overline{OB}\,(\beta' + \varepsilon_6).$$

Dans les raisonnements que nous venons de faire pour établir (5), nous avons exclu implicitement certains cas particuliers, par exemple celui où A coïncide avec O. On voit aisément que (5) est encore valable dans tous ces cas particuliers.

En raisonnant exactement comme nous l'avons fait pour établir (5) on montre qu'on a

$$(6) \qquad \overline{P'_zP'} = \overline{OC}\,\gamma' + \overline{OC}\,\varepsilon_7.$$

On trouve ensuite

$$(7) \quad \overline{OA} = \overline{OP}\,(\alpha + \varepsilon_8), \quad \overline{OB} = \overline{OP}\,(\beta + \varepsilon_9), \quad \overline{OC} = \overline{OP}\,(\gamma + \varepsilon_{10}).$$

En réunissant (1), (2), (3), (5), (6) et (7), on trouve

$$\overline{OP}\cos(s, s') + \varepsilon_1\,\overline{OP} = (\alpha' + \varepsilon_2)(\alpha + \varepsilon_8)\,\overline{OP} + (\beta' + \varepsilon_6)(\beta + \varepsilon_9)\,\overline{OP} + (\gamma' + \varepsilon_7)(\gamma + \varepsilon_{10})\,\overline{OP},$$

ou bien, $\overline{OP}$ étant différent de zéro,

$$\cos(s, s') + \varepsilon_1 = (\alpha' + \varepsilon_2)(\alpha + \varepsilon_8) + (\beta' + \varepsilon_6)(\beta + \varepsilon_9) + (\gamma' + \varepsilon_7)(\gamma + \varepsilon_{10}).$$

En passant à la limite dans cette égalité pour OP tendant vers zéro, on trouve

$$\cos(s, s') = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'. \qquad \text{C. q. f. d.}$$

375. Théorème. *Si les cosinus directeurs par rapport aux axes rectangulaires* OXYZ *d'une semi-droite issue de* O *sont*

α, β et γ, on a toujours

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

DÉMONSTRATION. Ce théorème résulte directement du § 374.

376. THÉORÈME. *Si α, β et γ sont trois nombres réels tels que*

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

il existe une semi-droite s et une seule issue de O *et ayant les nombres α, β et γ comme cosinus directeurs par rapport aux axes* OXYZ.

DÉMONSTRATION. Supposons qu'il existe une semi-droite s satisfaisant à la question. Soit P un point quelconque de s distinct de O. Si OP est assez petit, nous pourrons trouver quatre points A, B, C et P_z situés respectivement sur OX, sur OY, sur OZ et dans le plan OXY et tels que PP_z soit perpendiculaire au plan OXY, P_zA à OX, P_zB à OY et PC à OZ. PA est alors perpendiculaire à OX et PB à OY. Si OP est assez petit, on a (§§ 365 et 371)

$$(1)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{\overline{OA}}{k} = \operatorname{tg}\dfrac{\overline{OP}}{k}\,\alpha, \\[2ex] \operatorname{tg}\dfrac{\overline{OB}}{k} = \operatorname{tg}\dfrac{\overline{OP}}{k}\,\beta, \\[2ex] \operatorname{tg}\dfrac{\overline{OC}}{k} = \operatorname{tg}\dfrac{\overline{OP}}{k}\,\gamma. \end{cases}$$

Si maintenant il y avait une deuxième semi-droite s' satisfaisant à la question, nous pourrions, pourvu que OP soit assez petit, prendre sur s' un point P' tel que $OP = OP'$ et construire les points P'_z, A', B' et C' analogues à P_z, A, B et C. Nous aurions pour s' des relations analogues à (1) et il en résulte que nous aurions

$$(2)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{\overline{OA}}{k} = \operatorname{tg}\dfrac{\overline{OA'}}{k}, \\[2ex] \operatorname{tg}\dfrac{\overline{OB}}{k} = \operatorname{tg}\dfrac{\overline{OB'}}{k}, \\[2ex] \operatorname{tg}\dfrac{\overline{OC}}{k} = \operatorname{tg}\dfrac{\overline{OC'}}{k}. \end{cases}$$

Lorsque OP tend vers zéro, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OA'}$, $\overline{OB'}$ et $\overline{OC'}$ tendent vers zéro. Comme il n'y a jamais deux valeurs purement imaginaires distinctes de z ou deux valeurs réelles, distinctes et comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ de z pour lesquelles la fonction tg z prend la même valeur, on peut conclure de (2) qu'on a

$$\overline{OA} = \overline{OA'},$$
$$\overline{OB} = \overline{OB'},$$
$$\overline{OC} = \overline{OC'}$$

dès que OP est assez petit. A coïncide donc avec A′ et B avec B′; AP_z coïncide avec $A'P'_z$ et BP_z avec $B'P'_z$; P_z coïncide avec P'_z, C avec C′ et P avec P′; par conséquent s et s' coïncident.

Montrons maintenant qu'il y a au moins une semi-droite satisfaisant à la question. Soit ρ un nombre positif non nul. Si ρ est assez petit, on peut toujours trouver et d'une seule manière trois nombres réels x, y et z tels que

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{x}{k} &= \operatorname{tg}\frac{\rho}{k}\cdot\alpha \\ \operatorname{tg}\frac{y}{k} &= \operatorname{tg}\frac{\rho}{k}\cdot\beta \\ \operatorname{tg}\frac{z}{k} &= \operatorname{tg}\frac{\rho}{k}\cdot\gamma \end{aligned}\right\} \text{ et tels que l'on a } \left\{\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} < \frac{x}{k} < +\frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} < \frac{y}{k} < +\frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} < \frac{z}{k} < +\frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \text{ dans l'hypothèse de l'angle obtus.}$$

Lorsque ρ tend vers zéro, x, y et z tendent vers zéro et gardent toujours le même signe. Si ρ est assez petit, on peut donc trouver trois points A, B et C situés respectivement sur OX, sur OY et sur OZ et tels que $\overline{OA} = x$, $\overline{OB} = y$, $\overline{OC} = z$. Supposons d'abord α, β, γ différents de zéro. A, B et C restent toujours d'un même côté de O sur leurs droites respectives, lorsque ρ varie. Élevons en A et en B dans le plan OXY les perpendiculaires à OX et à OY respectivement. Si ρ est assez petit, ces perpendiculaires se couperont en un point P_z.

L'angle $\sphericalangle$ AOB est fixe et P_z est toujours intérieur à cet angle. Posons $\psi = \sphericalangle AOP_z$ et $\varphi = \sphericalangle BOP_z$. Nous aurons

$$\operatorname{tg}\frac{OA}{k} = \operatorname{tg}\frac{OP_z}{k}\cos\psi,$$

$$\operatorname{tg}\frac{OB}{k} = \operatorname{tg}\frac{OP_z}{k}\cos\varphi,$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\sin\psi}{\cos\psi} = \frac{\cos\varphi}{\cos\psi} = \frac{\operatorname{tg}\frac{OB}{k}}{\operatorname{tg}\frac{OA}{k}} = \left|\frac{\operatorname{tg}\frac{OB}{k}}{\operatorname{tg}\frac{OA}{k}}\right|$$

$$= \left|\frac{\operatorname{tg}\frac{\overline{OB}}{k}}{\operatorname{tg}\frac{\overline{OA}}{k}}\right| = \left|\frac{\operatorname{tg}\frac{y}{k}}{\operatorname{tg}\frac{x}{k}}\right| = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|.$$

$\operatorname{tg}\psi$ est donc indépendant de ρ, ψ l'est également et la droite OP_z reste fixe quand ρ varie. Elevons en C la perpendiculaire à OZ dans le plan OZP_z et élevons en P_z la perpendiculaire au plan OXY. Cette dernière perpendiculaire est aussi située dans le plan OZP_z ; comme OP_z tend vers zéro lorsque ρ tend vers zéro et comme la droite OP_z est fixe, la perpendiculaire élevée en P_z au plan OXY coupera celle élevée en C à OZ dès que ρ est assez petit ; soit P le point d'intersection. PA et PB sont perpendiculaires à OX et à OY respectivement. Soient α', β' et γ' les cosinus directeurs de | OP. Nous aurons

$$\operatorname{tg}\frac{x}{k} = \operatorname{tg}\frac{\overline{OP}}{k}\alpha',$$

$$\operatorname{tg}\frac{y}{k} = \operatorname{tg}\frac{\overline{OP}}{k}\beta',$$

$$\operatorname{tg}\frac{z}{k} = \operatorname{tg}\frac{\overline{OP}}{k}\gamma',$$

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'},$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad \text{(par hypothèse)},$$
$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1 \quad (\S\ 375).$$

Dès que ρ est assez petit, $\operatorname{tg}\frac{\rho}{k}$ et $\operatorname{tg}\frac{\overline{OP}}{k}$ sont positifs. α et α', β et β', γ et γ' sont donc de même signe. On a donc $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, et $|OP$ satisfait à la question. — Si un ou deux des nombres α, β, γ sont nuls, le raisonnement qui vient d'être fait reste valable moyennant des modifications n'offrant aucune difficulté.

377. Définition. Soit P un point quelconque de l'espace; soient α, β et γ les cosinus directeurs d'une semi-droite issue de O et passant par P et soit ρ la mesure du segment (OP). Posons

$$x_0 = q \cos\frac{\rho}{k},$$

$$x_1 = q \sin\frac{\rho}{k} \cdot \alpha,$$

$$x_2 = q \sin\frac{\rho}{k} \cdot \beta,$$

$$x_3 = q \sin\frac{\rho}{k} \cdot \gamma,$$

q étant un nombre arbitraire non nul, réel dans l'hypothèse de l'angle obtus et purement imaginaire dans l'hypothèse de l'angle aigu Quand P est donné, les quatre nombres x_0, x_1, x_2 et x_3 sont déterminés à moins d'un facteur de proportionnalité près. Ces quatre nombres sont les *coordonnées homogènes* du point P par rapport aux axes OXYZ.

378. Théorème. *Soient x_0, x_1, x_2 et x_3 les coordonnées homogènes d'un point quelconque. Dans l'hypothèse de l'angle obtus, les quatre nombres x_0, x_1, x_2 et x_3 sont réels et ne sont pas tous nuls. Dans l'hypothèse de l'angle aigu x_0 est purement imaginaire, x_1, x_2 et x_3 sont réels et l'on a $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 0$.*

Démonstration. Lorsque k est réel, $\cos\frac{\rho}{k}$ et $\sin\frac{\rho}{k}$ sont réels. Lorsque k est purement imaginaire, on a [§ 341,

formule (4)]

$$\sin\frac{\rho}{k} = \sin\frac{\rho}{\frac{1}{i}|k|} = \sin i\left(\frac{\rho}{|k|}\right) = i \operatorname{sh}\frac{\rho}{|k|}.$$

$\sin\frac{\rho}{k}$ est donc alors purement imaginaire et $q\sin\frac{\rho}{k}$ est réel. Remarquons de plus qu'on ne peut jamais avoir $\cos\frac{\rho}{k} = \sin\frac{\rho}{k} = 0$. Cela étant, la démonstration du théorème n'offre plus la moindre difficulté.

379. Théorème. *Si* P *est un point quelconque de l'espace, si* α, β, γ *sont les cosinus directeurs d'une semi-droite issue de* O *et passant par* P, *si* ρ *est la mesure de* (OP) *et si* x_0, x_1, x_2 *et* x_3 *sont les coordonnées homogènes de* P, *on a*

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos\frac{\rho}{k} = \frac{x_0}{\pm\sqrt{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}}, \quad \alpha\sin\frac{\rho}{k} = \frac{x_1}{\pm\sqrt{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}}, \\ &\beta\sin\frac{\rho}{k} = \frac{x_2}{\pm\sqrt{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}}, \quad \gamma\sin\frac{\rho}{k} = \frac{x_3}{\pm\sqrt{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\end{aligned}\right.$$

Réciproquement, si x_0, x_1, x_2 *et* x_3 *sont quatre nombres satisfaisant à* (1) *et aux conditions du* § 378, *on peut prendre* x_0, x_1, x_2 *et* x_3 *comme coordonnées homogènes de* P.

Démonstration. On a d'après le § 375

$$q = \pm\sqrt{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2},$$

d'où l'on déduit immédiatement les relations à établir.

La démonstration de la réciproque est immédiate.

380. Théorème. *Etant donné un système de nombres* x_0, x_1, x_2 *et* x_3 *satisfaisant aux conditions du* § 378, *il y a au plus un seul point dont ces nombres soient les coordonnées homogènes. Il existe un nombre positif* ε *assez petit pour qu'il existe un point dont les coordonnées homogènes soient* x_0, x_1, x_2 *et* x_3 *dès que* x_0, x_1, x_2 *et* x_3 *satisfont aux conditions du* § 378 *et à l'inégalité*

$$(1)\qquad \left|\left|\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\right| - 1\right| < \varepsilon.$$

Démonstration. Occupons-nous d'abord de la première

partie du théorème et cherchons quels sont les points qui pourraient avoir les coordonnées homogènes x_0, x_1, x_2 et x_3 données à l'avance. Pour tous ces points les quantités ρ, α, β et γ satisfont aux relations (1) du § 379.

Dans l'hypothèse de l'angle aigu, $\cos\frac{\rho}{k}$ est positif et le radical qui figure dans les relations (1) du § 379 doit avoir le même signe que le coefficient de $+\sqrt{-1}$ dans x_0. Le deuxième membre de la première de ces relations est supérieur ou égal à $+1$ et il y a une valeur de ρ et une seule qui satisfait à cette relation. Les valeurs de α, β et γ qui y répondent sont parfaitement déterminées sauf quand $\rho = 0$, auquel cas l'origine est le seul point qui ait les nombres donnés x_0, x_1, x_2, x_3 comme coordonnées homogènes ; on voit immédiatement qu'on a

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Il y a donc une semi-droite et une seule s issue de O qui a comme cosinus directeurs α, β et γ (§ 376) S'il y a un point P sur s tel que $OP = \rho$, le point P satisfait à la question ; s'il n'y a pas de point pareil sur s, il n'y a aucun point satisfaisant à la question.

Dans l'hypothèse de l'angle obtus, on doit avoir $\frac{\rho}{k} < \pi$. Si x_0 est différent de zéro, il y a deux valeurs ρ' et ρ'' de ρ ne dépassant pas $k\pi$ qui vérifient la première relation (1) du § 379. On a $\frac{\rho'}{k} < \frac{\pi}{2}$ et $\rho'' = k\pi - \rho'$. Pour $\rho = \rho'$, $\cos\frac{\rho}{k}$ est positif et le radical a le même signe que x_0 ; α, β et γ ont des valeurs parfaitement déterminées α', β' et γ', sauf lorsque $\frac{\rho'}{k} = 0$, auquel cas l'origine est le seul point satisfaisant à la question. Pour $\rho = k\pi - \rho'$, le radical prend le signe contraire à celui de x_0 et l'on a $\alpha = -\alpha'$, $\beta = -\beta'$ et $\gamma = -\gamma'$. On a $\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1$. Il y a donc une semi-droite et une seule s' issue de O ayant comme cosinus directeurs α', β' et γ'. La semi-

droite s'' opposée à s' aura comme cosinus directeurs $-\alpha'$, $-\beta'$ et $-\gamma'$ et sera d'ailleurs la seule jouissant de cette propriété. Si x_0 est nul, on trouve une seule valeur de ρ qui vérifie la première relation (1) du § 379, à savoir $\rho = k\frac{\pi}{2}$. A cette valeur unique de ρ répondent deux systèmes de valeurs de α, β, γ, à savoir α', β', γ' et $-\alpha', -\beta', -\gamma'$. On a encore $\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1$. Posons dans ce cas $\rho' = \rho'' = k\frac{\pi}{2}$ et désignons encore par s' la semi-droite répondant à α', β', γ' et par s'' la semi-droite opposée qui répond à $-\alpha', -\beta', -\gamma'$.

S'il y a sur s' un point P' tel que $OP' = \rho'$, le point P' satisfait à la question ; s'il y a un point P'' sur s'' tel que $OP'' = k\pi - \rho'$, P'' y satisfait aussi. Il n'y a pas d'autres points que P' et P'' pouvant satisfaire à la question. Mais P' et P'' ne peuvent exister tous les deux; sinon on aurait $P'P'' = k\pi$, ce qui est impossible.

La première partie du théorème est donc établie.

Passons maintenant à la seconde partie. Nous pouvons facilement construire un tétraèdre auquel le point O est intérieur. La mesure d'un segment déterminé par O et un point de la surface du tétraèdre est toujours différente de zéro; on peut d'ailleurs trouver aisément deux variables indépendantes dont elle est une fonction continue. Cela étant, il résulte du théorème de Weierstrass (§ 324) qu'il y a un nombre positif l inférieur aux mesures de tous les segments déterminés par O et par les points de la surface du tétraèdre. Sur chaque semi-droite issue de O on pourra alors trouver un point déterminant avec O un segment de mesure l. On peut trouver un nombre positif ε suffisamment petit pour que l'on ait

$$(2) \qquad \rho < l$$

dès que ρ est un nombre satisfaisant à

$$\left| \cos\frac{\rho}{k} - 1 \right| < \varepsilon,$$

ρ étant toujours positif et de plus inférieur à $k\pi$ dans l'hypothèse de l'angle obtus. Alors, dès que l'on a (1), la valeur unique de ρ qu'on trouve dans l'hypothèse de l'angle aigu ou la valeur inférieure à $k\frac{\pi}{2}$ qu'on trouve dans l'hypothèse de l'angle obtus satisfera à (2), et la seconde partie de notre théorème se trouve ainsi établie.

381. Théorème. *Etant donnés deux points* P (x_0, x_1, x_2, x_3) *et* P′ (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3), *les* x *et les* x' *désignant les coordonnées homogènes des deux points, on a*

$$\cos\frac{PP'}{k} = \frac{x_0 x'_0 + x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + x_3 x'_3}{\pm\sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{x'^2_0 + x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3}},$$

chacun des radicaux ayant le signe qui résulte de la discussion du § 380.

Démonstration. Posons $\rho = OP$, $\rho' = OP'$; soient α, β, γ les cosinus directeurs de |OP et α', β', γ' ceux de |OP′. On a

$$\cos\frac{PP'}{k} = \cos\frac{\rho}{k}\cos\frac{\rho'}{k} + \sin\frac{\rho}{k}\sin\frac{\rho'}{k}\cos \sphericalangle POP' \quad (\S\ 366),$$

$$\cos \sphericalangle POP' = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' \quad (\S\ 374),$$

$$\cos\frac{PP'}{k} = \frac{x_0 x'_0 + x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + x_3 x'_3}{\pm\sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{x'^2_0 + x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3}} \quad (\S\ 379).$$

C. q. f. d.

382. Théorème. *Supposons donné un point* P *dont les coordonnées homogènes sont* x_0, x_1, x_2, x_3 *; si l'on convient de laisser les nombres* x_0, x_1, x_2, x_3 *fixes (c. à d. de ne pas changer la valeur du coefficient arbitraire dont ils dépendent), on peut trouver quatre nombres positifs* ε_0, ε_1, ε_2, ε_3 *suffisamment petits pour qu'il existe un point* P′ *de coordonnées homogènes* x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 *dès que* x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 *satisfont aux conditions du* § 378 *et aux inégalités*

$$|x'_0 - x_0| < \varepsilon_0,$$
$$|x'_1 - x_1| < \varepsilon_1,$$
$$|x'_2 - x_2| < \varepsilon_2,$$
$$|x'_3 - x_3| < \varepsilon_3.$$

Démonstration. Si P coïncide avec l'origine O, on a $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ (§ 377) et $\left|\dfrac{x'_0}{\sqrt{x'^2_0 + x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3}}\right|$ sera arbitrairement rapproché de 1 lorsque ε_0, ε_1, ε_2 et ε_3 sont suffisamment petits. Le théorème à établir résulte alors directement du § 380.

Supposons P distinct de O ; soit ρ la mesure de (OP) et soient α, β, γ les cosinus directeurs de |OP. Les relations (1) du § 379 sont alors vérifiées Remplaçons dans ces relations ρ, α, β, γ, x_0, x_1, x_2, x_3 par ρ', α', β', γ', x'_0, x'_1, x'_2, x'_3; les x' sont 4 nombres arbitraires remplissant les conditions du § 378, les 3 derniers n'étant pas tous nuls ; ρ', α', β', γ' sont considérés comme inconnues ; donnons enfin dans le cas de l'angle obtus au radical $\sqrt{x'^2_0 + x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3}$ le même signe que celui dont est précédé le radical $\sqrt{x^2_0 + x^2_1 + x^2_2 + x^2_3}$ dans les relations (1) primitives. Désignons par (1′) les équations ainsi obtenues. Il y a un système de valeurs et un seul de ρ', α', β', γ' qui vérifie les équations (1′) (§ 380, démonstration) et l'on a

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1.$$

Soit s' la semi-droite qui a pour cosinus directeurs α', β', γ'. Lorsque x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 tendent respectivement vers x_0, x_1, x_2, x_3, les nombres ρ', α', β', γ' tendront respectivement vers ρ, α, β, γ. (|OP, s') tendra vers zéro.

Soit maintenant P_1 un point fixe de OP tel que P soit entre O et P_1. Menons par P_1 un plan fixe π ne passant pas par O. Entourons dans π le point P_1 d'un triangle ABC dont chaque côté a une mesure inférieure à $\frac{1}{6}PP_1$. Soit X un point quelconque du périmètre de ce triangle. Si X se meut continûment le long du périmètre du triangle, $\sphericalangle XOP_1$ varie continûment; on établit cela sans la moindre difficulté au moyen des formules de la trigonométrie. Lorsque X parcourt continûment tout le périmètre du triangle, $\sphericalangle XOP_1$ varie continûment à partir d'une valeur non nulle, reste toujours différent de zéro et revient à la

première valeur. D'après le théorème de Weierstrass (§ 324), il y a donc un nombre non nul positif l tel que l'on a toujours

$$\sphericalangle XOP_1 > l$$

si X est un point du périmètre du triangle ABC.

Soit I un point quelconque intérieur au triangle ABC ou situé sur son périmètre. On a

$$|OI - OP_1| < IP_1 < AB + BC + CA < \frac{1}{2} PP_1,$$

$$OI > OP + \frac{1}{2} PP_1.$$

Prenons x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 assez voisins de x_0, x_1, x_2, x_3 respectivement pour que l'on ait toujours

$$\rho' < \rho + \frac{1}{2} PP_1,$$

$$(|OP, s') < l.$$

Alors s' coupera toujours π en un point P'_1 intérieur au triangle ABC. On aura

$$OP'_1 > \rho + \frac{1}{2} PP_1 > \rho'$$

et il y aura un point P′ entre O et P'_1 tel que $OP' = \rho'$.

Le point P′ aura comme coordonnées homogènes les nombres x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 (§ 379). Le théorème à démontrer se trouve ainsi établi.

383. Théorème. *Supposons donné un point* P *dont les coordonnées homogènes sont* x_0, x_1, x_2, x_3. *Convenons de laisser les nombres* x_0, x_1, x_2, x_3 *fixes. A tout nombre positif arbitrairement petit* δ *on peut faire correspondre des nombres positifs* ε_0, ε_1, ε_2, ε_3 *suffisamment petits pour qu'il existe un point* P′ *de coordonnées* x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 *et pour que l'on ait*

$$PP' < \delta$$

dès que x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 *satisfont aux conditions du* § 378 *et aux inégalités*

$$|x'_0 - x_0| < \varepsilon_0,\ |x'_1 - x_1| < \varepsilon_1,\ |x'_2 - x_2| < \varepsilon_2,\ |x'_3 - x_3| < \varepsilon_3.$$

Démonstration. Si ε_0, ε_1, ε_2, ε_3 sont assez petits, le point P′ existera certainement (§ 382) et les signes qu'ont les radicaux $\sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ et $\sqrt{x'^2_0 + x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3}$

dans les relations (1) du § 379 relatives aux points P et P′ seront les mêmes (voir § 382, démonstration). Cela étant, on constate immédiatement d'après le § 381 que $\cos\frac{PP'}{k}$ tend vers 1 lorsque x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 tendent respectivement vers x_0, x_1, x_2, x_3. PP′ tend donc vers zéro dans ces conditions.

384. Théorème. *Supposons donné un point* P *dont les coordonnées homogènes sont* x_0, x_1, x_2, x_3. *Convenons de laisser les nombres* x_0, x_1, x_2, x_3 *fixes. A chaque système de quatre nombres positifs* $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ *arbitrairement petits on peut faire correspondre un nombre positif* δ *suffisamment petit pour que l'on ait*

$$|x'_0 - x_0| < \varepsilon_0, \; |x'_1 - x_1| < \varepsilon_1, \; |x'_2 - x_2| < \varepsilon_2, \; |x'_3 - x_3| < \varepsilon_3$$

dès que x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 *sont les coordonnées homogènes convenablement choisies d'un point* P′ *pour lequel on a*

$$PP' < \delta.$$

Démonstration. Si δ est assez petit, $|\rho' - \rho|$ reste arbitrairement petit [ρ désigne la mesure de (OP), ρ' désigne celle de (OP′)]. On voit de plus par les formules de trigonométrie que $|\alpha' - \alpha|$, $|\beta' - \beta|$, $|\gamma' - \gamma|$ restent aussi arbitrairement petits lorsque δ est assez petit, si P est distinct de O (α, β, γ sont les cosinus directeurs de |OP et α', β', γ' sont ceux de |OP′). Cela étant, on démontre le théorème sans la moindre difficulté.

385. Théorème. *Supposons donnés deux systèmes d'axes coordonnés rectangulaires* OXYZ *et* OX′Y′Z′ *ayant même origine. Soient* l_1, m_1, n_1 *les cosinus directeurs de* |OX′ *par rapport aux axes* OXYZ, l_2, m_2, n_2 *ceux de* |OY′ *et* l_3, m_3, n_3 *ceux de* |OZ′ *par rapport aux mêmes axes. Si* x_0, x_1, x_2, x_3 *sont les coordonnées homogènes d'un point* P *par rapport aux axes* OXYZ *et si* x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 *sont les coordonnées du même point par rapport aux axes* OX′Y′Z′, *on a*

$$(1) \qquad \begin{cases} qx'_0 = x_0, \\ qx'_1 = l_1x_1 + m_1x_2 + n_1x_3, \\ qx'_2 = l_2x_1 + m_2x_2 + n_2x_3, \\ qx'_3 = l_3x_1 + m_3x_2 + n_3x_3, \end{cases}$$

q étant un nombre réel non nul.

DÉMONSTRATION. Soient α, β, γ les cosinus directeurs de |OP par rapport aux axes OXYZ et α', β', γ' ceux de la même semi-droite par rapport aux axes OX'Y'Z'. Si nous nous rapportons aux axes OXYZ et appliquons le § 374, nous trouvons

$$\alpha' = l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma,$$
$$\beta' = l_2\alpha + m_2\beta + n_2\gamma,$$
$$\gamma' = l_3\alpha + m_3\beta + n_3\gamma.$$

On a donc d'après le § 379

$$\frac{x'_0}{\pm\sqrt{x'^2_0 + x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3}} = \frac{x_0}{\pm\sqrt{x^2_0 + x^2_1 + x^2_2 + x^2_3}},$$

$$\frac{x'_1}{\pm\sqrt{x'^2_0 + x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3}} = l_1\frac{x_1}{\pm\sqrt{x^2_0 + x^2_1 + x^2_2 + x^2_3}}$$
$$+ m_1\frac{x_2}{\pm\sqrt{x^2_0 + x^2_1 + x^2_2 + x^2_3}} + n_1\frac{x_3}{\pm\sqrt{x^2_0 + x^2_1 + x^2_2 + x^2_3}},$$

$$\frac{x'_2}{\pm\sqrt{x'^2_0 + \cdots}} = l_2\frac{x_1}{\pm\sqrt{x^2_0 + \cdots}} + m_2\frac{x_2}{\pm\sqrt{x^2_0 + \cdots}} + n_2\frac{x_3}{\pm\sqrt{x^2_0 + \cdots}},$$

$$\frac{x'_3}{\pm\sqrt{x'^2_0 + \cdots}} = l_3\frac{x_1}{\pm\sqrt{x^2_0 + \cdots}} + m_3\frac{x_2}{\pm\sqrt{x^2_0 + \cdots}} + n_3\frac{x_3}{\pm\sqrt{x^2_0 + \cdots}}.$$

Le radical qui figure dans les premiers membres y a toujours le même signe. Celui qui figure dans les seconds membres y a aussi toujours le même signe. Les deux radicaux sont différents de zéro et tous les deux réels ou tous les deux purement imaginaires (§ 378). Si l'on désigne par q le rapport $\frac{\pm\sqrt{x^2_0 + \cdots}}{\pm\sqrt{x'^2_0 + \cdots}}$, les deux radicaux étant pris avec le signe convenable, q sera réel et non nul et l'on obtient immédiatement les relations (1).

386. DÉFINITION. On appelle *translation suivant l'axe* |OZ une transformation congruente dans laquelle la semi-droite |OZ est transformée en une semi-droite de même support et de même sens, dans laquelle la moitié du plan OXZ limitée à OZ et contenant |OX est transformée en elle-même, et dans laquelle la moitié de l'espace limitée au

plan OXZ et contenant $|OY$ est transformée en elle-même également.

Soit O' le transformé de O dans une translation suivant l'axe $|OZ$. Supposons que le point Z ait été choisi de telle façon que Z soit extérieur à (OO'). $|OZ$ sera transformé en $|O'Z$. Le transformé de $|OX$ est la semi-droite $|O'X'$ issue de O', située dans le plan OXZ du même côté de OZ que $|OX$ et formant avec $|O'Z$ un angle droit. Le transformé de $|OY$ sera la semi-droite $|O'Y'$ issue de O' qui est perpendiculaire au plan OXZ et située du même côté de ce plan que $|OY$. $|O'Y'$ est dans le plan OYZ et est situé du même côté de OZ que $|OY$. La moitié du plan OYZ limitée à OZ et contenant $|OY$ est donc transformée en elle-même ainsi que la moitié de l'espace limitée au plan OYZ et contenant $|OX$.

Étant donné un point O' sur la droite OZ, il existe une translation suivant $|OZ$ et une seule qui porte O en O' (§ 192)

Soit α un plan passant par OZ autre que OXZ ou OYZ α coupe OXY suivant une droite ; soit a l'une des deux semi-droites determinées par O sur cette droite. Soit a' celle des deux semi-droites déterminées par O' sur l'intersection de α avec $O'X'Y'$ qui est située du même côté de OZ que a. On a

$$(|OY, a) = (|O'Y', a') \text{ (§ 75)}.$$

a et a' sont d'ailleurs situés d'un même côté du plan OYZ. Dans la translation suivant $|OZ$ qui porte O en O', a est transformé en une semi-droite a'' issue de O'. a'' est situé dans l'espace du même côté du plan OYZ que a'; dans le plan $O'X'Y'$, a'' est donc situé du même côté de $O'Y'$ que a' ; on a de plus

$$(|OY, a) = (|O'Y', a'').$$

a'' coïncide donc avec a'.

Par conséquent tout plan passant par OZ est transformé en lui-même ainsi que tout demi-plan limité à OZ.

387. Théorème. *Supposons donnés deux systèmes d'axes coordonnés rectangulaires* OXYZ *et* $O'X'Y'Z'$, *le deuxième système*

étant déduit du premier par une translation le long de | OZ. *Soit* d *la valeur algébrique du segment* $\overline{OO'}$. *Si* x_0, x_1, x_2, x_3 *sont les coordonnées homogènes d'un point* P *par rapport aux axes* OXYZ *et* x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 *celles du même point par rapport aux axes* O'X'Y'Z', *on a*

$$(1) \quad \begin{cases} qx'_0 = x_0 \cos\frac{d}{k} + x_3 \sin\frac{d}{k}, \\ qx'_1 = x_1, \\ qx'_2 = x_2, \\ qx'_3 = - x_0 \sin\frac{d}{k} + x_3 \cos\frac{d}{k}, \end{cases}$$

q étant un nombre réel non nul.

Démonstration. Soient ρ la mesure de (OP) et ρ' celle de (O'P). Soient α, β, γ les cosinus directeurs de | OP par rapport aux axes OXYZ et α', β', γ' ceux de | O'P par rapport aux axes O'X'Y'Z'. Soit | O'X'' la semi-droite issue de O' située à la fois dans les plans O'X'Y' et O'PZ', et située dans ce dernier plan du même côté de O'Z' que P. Soit | O'Y'' une semi-droite issue de O', située dans le plan O'X'Y' et faisant un angle droit avec | O'X''. Posons enfin

$$\varphi_1 = (|\,O'X'', |\,O'X'), \quad \psi_1 = (|\,O'Y'', |\,O'X'),$$
$$\varphi_2 = (|\,O'X'', |\,O'Y'), \quad \psi_2 = (|\,O'Y'', |\,O'Y').$$

Nous aurons

$$\cos\frac{O'P}{k} = \cos\frac{OO'}{k}\cos\frac{OP}{k} + \sin\frac{OO'}{k}\sin\frac{OP}{k}\cos \sphericalangle O'OP \quad (§ 366)$$

ou bien

$$\cos\frac{\rho'}{k} = \cos\frac{d}{k}\cos\frac{\rho}{k} + \sin\frac{\rho}{k}\sin\frac{OO'}{k}\cos \sphericalangle O'OP.$$

On a toujours

$$\left|\sin\frac{OO'}{k}\right| = \left|\sin\frac{d}{k}\right|,$$
$$|\cos \sphericalangle O'OP| = |\gamma|.$$

Si d est positif, $\sin\frac{OO'}{k}$ et $\sin\frac{d}{k}$ sont de même signe, | OO' coïncide avec | OZ et $\cos \sphericalangle O'OP$ et γ sont de même signe. Si d est négatif, $\sin\frac{OO'}{k}$ et $\sin\frac{d}{k}$ sont de signes contraires,

$|OO'$ est la semi-droite opposée à $|OZ$ et $\cos \sphericalangle O'OP$ et γ sont de signes contraires. On a donc toujours $\sin \frac{OO'}{k} \cos \sphericalangle O'OP = \sin \frac{d}{k} \cdot \gamma$ et par conséquent

$$(2) \qquad \cos \frac{\rho'}{k} = \cos \frac{\rho}{k} \cos \frac{d}{k} + \gamma \sin \frac{\rho}{k} \sin \frac{d}{k} \cdot$$

On a ensuite

$$\cos \frac{OP}{k} = \cos \frac{OO'}{k} \cos \frac{O'P}{k} + \sin \frac{OO'}{k} \sin \frac{O'P}{k} \cos \sphericalangle OO'P \ (\S\ 366)$$

ou bien

$$\cos \frac{\rho}{k} = \cos \frac{d}{k} \cos \frac{\rho'}{k} + \sin \frac{\rho'}{k} \sin \frac{OO'}{k} \cos \sphericalangle OO'P.$$

Par une discussion simple analogue à la précédente on voit qu'on a toujours

$$\sin \frac{OO'}{k} \cos \sphericalangle OO'P = -\sin \frac{d}{k} \cdot \gamma'.$$

On a donc

$$\cos \frac{\rho}{k} = \cos \frac{\rho'}{k} \cos \frac{d}{k} - \gamma' \sin \frac{\rho'}{k} \sin \frac{d}{k} \cdot$$

En remplaçant dans cette relation $\cos \frac{\rho'}{k}$ par sa valeur fournie par (2) on trouve

$$\cos \frac{\rho}{k} = \left(\cos \frac{\rho}{k} \cos \frac{d}{k} + \gamma \sin \frac{\rho}{k} \sin \frac{d}{k}\right) \cos \frac{d}{k} - \gamma' \sin \frac{\rho'}{k} \sin \frac{d}{k},$$

$$\cos \frac{\rho}{k} \sin^2 \frac{d}{k} = \gamma \sin \frac{\rho}{k} \sin \frac{d}{k} \cos \frac{d}{k} - \gamma' \sin \frac{\rho'}{k} \sin \frac{d}{k} \cdot$$

Quand $\sin \frac{d}{k}$ est différent de zéro, on a donc

$$\cos \frac{\rho}{k} \sin \frac{d}{k} = \gamma \sin \frac{\rho}{k} \cos \frac{d}{k} - \gamma' \sin \frac{\rho'}{k}$$

ou bien

$$(3) \qquad \gamma' \sin \frac{\rho'}{k} = -\cos \frac{\rho}{k} \sin \frac{d}{k} + \gamma \sin \frac{\rho}{k} \cos \frac{d}{k} \cdot$$

Lorsque $\sin \frac{d}{k}$ est nul, d est nul et (3) a encore lieu.

Suivant que $|O'P$ est entre $|O'Z'$ et $|O'X''$ ou entre $|O'X''$ et la semi-droite opposée à $|O'Z'$, on a $(|O'X'', |O'P) = \frac{\pi}{2} - (|O'Z', |O'P)$ ou $(|O'X'', |O'P) = (|O'Z', |O'P) - \frac{\pi}{2}$. On a donc toujours $\cos(|O'X'', |O'P) = \sin(|O'Z', |O'P)$. $\sin(|O'Z', |O'P)$ est toujours $\geqslant 0$ et vaut donc toujours $+\sqrt{1-\gamma'^2}$. On a donc

$$\cos(|O'X'', |O'P) = +\sqrt{1-\gamma'^2}.$$

Considérons maintenant la transformation congruente qui transforme les axes OXYZ dans les axes $O'X'Y'Z'$; soit s' la transformée de $|OP$ dans cette transformation. s' se trouve dans le plan $O'PZ'$ du même côté de $O'Z'$ que P. Les cosinus directeurs de s' par rapport aux axes $O'X'Y'Z'$ sont α, β, γ. On trouve en raisonnant de la même façon que nous l'avons fait pour $\cos(|O'X'', |O'P)$

$$\cos(|O'X'', s') = +\sqrt{1-\gamma^2}.$$

Les cosinus directeurs de $|O'X'$, $|O'P$, s' et $|O'Y'$ par rapport aux axes $O'X''Y''Z'$ sont

$$\begin{array}{llll}
|O'X' \ldots & \cos\varphi_1, & \cos\psi_1, & 0; \\
|O'P \ldots & +\sqrt{1-\gamma'^2}, & 0, & \gamma'; \\
s' \ldots & +\sqrt{1-\gamma^2}, & 0, & \gamma; \\
|O'Y' \ldots & \cos\varphi_2, & \cos\psi_2, & 0.
\end{array}$$

Nous avons donc d'après le § 374

$$\alpha = \cos\varphi_1 \sqrt{1-\gamma^2}, \quad \alpha' = \cos\varphi_1 \sqrt{1-\gamma'^2},$$
$$\beta = \cos\varphi_2 \sqrt{1-\gamma^2}, \quad \beta' = \cos\varphi_2 \sqrt{1-\gamma'^2}.$$

D'après ces égalités, α et α' sont de même signe; $\sin\frac{\rho}{k}$ et $\sin\frac{\rho'}{k}$ étant aussi de même signe, $\alpha \sin\frac{\rho}{k}$ et $\alpha' \sin\frac{\rho'}{k}$ sont de même signe. On a

$$\alpha^2 \sin^2\frac{\rho}{k} = \cos^2\varphi_1 \left(\sin^2\frac{\rho}{k} - \gamma^2 \sin^2\frac{\rho}{k}\right),$$
$$\alpha'^2 \sin^2\frac{\rho'}{k} = \cos^2\varphi_1 \left(\sin^2\frac{\rho'}{k} - \gamma'^2 \sin^2\frac{\rho'}{k}\right).$$

D'après (2) et (3) on peut écrire

$$\alpha'^2 \sin^2\frac{\rho'}{k} = \cos^2\varphi_1\left(1 - \cos^2\frac{\rho'}{k} - \gamma'^2 \sin^2\frac{\rho'}{k}\right)$$

$$= \cos^2\varphi_1\left(1 - \cos^2\frac{\rho}{k}\cos^2\frac{d}{k} - \gamma^2\sin^2\frac{\rho}{k}\sin^2\frac{d}{k}\right.$$

$$- 2\cos\frac{\rho}{k}\cos\frac{d}{k}\gamma\sin\frac{\rho}{k}\sin\frac{d}{k} - \cos^2\frac{\rho}{k}\sin^2\frac{d}{k} - \gamma^2\sin^2\frac{\rho}{k}\cos^2\frac{d}{k}$$

$$\left. + 2\cos\frac{\rho}{k}\sin\frac{d}{k}\gamma\sin\frac{\rho}{k}\cos\frac{d}{k}\right)$$

$$= \cos^2\varphi_1\left(\sin^2\frac{\rho}{k} - \gamma^2\sin^2\frac{\rho}{k}\right) = \alpha^2\sin^2\frac{\rho}{k}.$$

$\alpha \sin\frac{\rho}{k}$ et $\alpha' \sin\frac{\rho'}{k}$ étant de même signe, on a

$$(4) \qquad \alpha' \sin\frac{\rho'}{k} = \alpha \sin\frac{\rho}{k}.$$

On trouve de même

$$(5) \qquad \beta' \sin\frac{\rho'}{k} = \beta \sin\frac{\rho}{k}.$$

De (2), (3), (4) et (5) on déduit sans difficulté au moyen du § 379 les formules (1).

388. Théorème. *Supposons donnés deux systèmes d'axes coordonnés rectangulaires quelconques* OXYZ *et* O'X'Y'Z'. *Soient* x_0, x_1, x_2, x_3 *les coordonnées homogènes d'un point quelconque* P *par rapport aux axes* OXYZ *et soient* x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 *les coordonnées homogènes du même point par rapport aux axes* O'X'Y'Z'. *On a*

$$(1) \quad \begin{cases} qx'_0 = L_0 x_0 + L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3, \\ qx'_1 = L'_0 x_0 + L'_1 x_1 + L'_2 x_2 + L'_3 x_3, \\ qx'_2 = L''_0 x_0 + L''_1 x_1 + L''_2 x_2 + L''_3 x_3, \\ qx'_3 = L'''_0 x_0 + L'''_1 x_1 + L'''_2 x_2 + L'''_3 x_3, \end{cases}$$

les L *étant des constantes qui satisfont aux conditions*

$$(2) \quad L_0^2 + L_0'^2 + L_0''^2 + L_0'''^2 = 1;\ \Sigma L_1^2 = \Sigma L_2^2 = \Sigma L_3^2 = 1;$$

$$(3) \quad \begin{cases} L_0L_1 + L'_0L'_1 + L''_0L''_1 + L'''_0L'''_1 = 0; \\ \Sigma L_0L_2 = \Sigma L_0L_3 = \Sigma L_1L_2 = \Sigma L_1L_3 = \Sigma L_2L_3 = 0. \end{cases}$$

Tous les L *sont réels dans l'hypothèse de l'angle obtus. Dans l'hypothèse de l'angle aigu,* L_0 *est réel;* $L_1, L_2, L_3, L'_0, L''_0, L'''_0$

sont chacun purement imaginaire ou nul; L'_1, L'_2, L'_3, L''_1, L''_2, L''_3, L'''_1, L'''_2, L'''_3 *sont réels.* q *est toujours un nombre réel différent de zéro.*

Démonstration. Pour établir ce théorème, il faudra nous baser sur les §§ 297, 298, 299, 300 et 301, mais comme certaines des quantités avec lesquelles nous avons à faire actuellement sont imaginaires, il faudra étendre les §§ 297-301 aux quantités imaginaires.

Appelons actuellement « point » de l'espace à n dimensions un système de valeurs quelconques réelles ou complexes attribuées aux variables $x_1, x_2, ..., x_n$.

Appelons « distance » de deux points $A(a_1, a_2, ..., a_n$ et $B(b_1, b_2, ..., b_n)$ l'un quelconque des deux nombres

$$\pm \sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2}.$$

Les deux nombres complexes qui mesurent la distance de deux points sont égaux au signe près. Cette ambiguité quant au signe n'entraîne pas le moindre inconvénient.

Nous définissons maintenant les transformations linéaires orthogonales étendues aux points à coordonnées complexes comme au § 297. Les coefficients l sont actuellement des constantes réelles ou complexes.

On établit maintenant les théorèmes des §§ 298, 299, 300 et 301 étendus aux points à coordonnées complexes en raisonnant exactement de la même manière que nous l'avons fait dans ces paragraphes mêmes ; pour faire disparaître l'ambiguité de signe relative à la distance, il suffit de remplacer dans les énoncés l'expression « distance de deux points » par l'expression « carré de la distance de deux points ».

Revenons maintenant au théorème qu'il s'agit de démontrer. Dans les formules (1) du § 385, l_1, l_2, l_3 sont les cosinus directeurs de | OX par rapport aux axes OX'Y'Z'; m_1, m_2, m_3 sont ceux de | OY et n_1, n_2, n_3 ceux de | OZ par rapport aux mêmes axes. On a donc

$$l_1^2+l_2^2+l_3^2=m_1^2+m_2^2+m_3^2=n_1^2+n_2^2+n_3^2=1 \text{ (§ 375)},$$
$$l_1m_1+l_2m_2+l_3m_3=l_1n_1+l_2n_2+l_3n_3$$
$$=m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3=0 \text{ (§ 374)}.$$

Cela étant, on constate immédiatement que le théorème à

démontrer est vrai pour une transformation d'axes coordonnés telle que celle considérée au § 385.

En second lieu on constate immédiatement que le théorème à démontrer est encore vrai pour une transformation d'axes coordonnés telle que celle considérée au § 387.

Remarquons de plus qu'on peut exprimer d'une autre manière que les L satisfont à (2) et à (3) en disant que la transformation linéaire par laquelle on passe des variables x_0, x_1, x_2, x_3 aux variables $qx'_0, qx'_1, qx'_2, qx'_3$ est une transformation linéaire orthogonale.

Considérons maintenant nos systèmes d'axes rectangulaires quelconques OXYZ et O'X'Y'Z'. Soit OX''Y''Z'' un système d'axes coordonnés rectangulaires dont l'origine est en O et dont le troisième axe OZ'' appartient à la droite OO'. Considérons la translation suivant l'axe OZ'' qui porte O en O' et soient O'X'''Y'''Z''' les axes en lesquels OX''Y''Z'' sont transformés par cette translation. Soient $x''_0, x''_1, x''_2, x''_3$ les coordonnées homogènes de P par rapport aux axes OX''Y''Z'' et x'''_0, x'''_1, x'''_2, x'''_3 celles du même point par rapport aux axes O'X'''Y'''Z'''.

Convenons maintenant de désigner par

$$\begin{gathered} f_0^{(\nu)}(t_0, t_1, t_2, t_3), \\ f_1^{(\nu)}(t_0, t_1, t_2, t_3), \\ f_2^{(\nu)}(t_0, t_1, t_2, t_3), \\ f_3^{(\nu)}(t_0, t_1, t_2, t_3) \end{gathered}$$

des fonctions linéaires à coefficients réels ou complexes des quatre variables réelles ou complexes t_0, t_1, t_2, t_3 telles que la transformation linéaire par laquelle on passe du point t_0, t_1, t_2, t_3 de l'espace euclidien à quatre dimensions au point $f_0^{(\nu)}, f_1^{(\nu)}, f_2^{(\nu)}, f_3^{(\nu)}$ du même espace est orthogonale et laisse le point 0, 0, 0, 0 invariant.

Nous aurons (§ 385)

$$\begin{aligned} q'x''_0 &= f'_0(x_0, x_1, x_2, x_3), \\ q'x''_1 &= f'_1(x_0, x_1, x_2, x_3), \\ q'x''_2 &= f'_2(x_0, x_1, x_2, x_3), \\ q'x''_3 &= f'_3(x_0, x_1, x_2, x_3), \end{aligned}$$

q' étant un nombre réel non nul.

Comme on peut prendre comme coordonnées homogènes de P par rapport aux axes OX''Y''Z'' les quantités $q'x''_0, q'x''_1, q'x''_2, q'x''_3$, nous aurons d'après le § 387

$$q''x'''_0 = f''_0\,(q'x''_0, q'x''_1, q'x''_2, q'x''_3),$$
$$q''x'''_1 = f''_1\,(q'x''_0, q'x''_1, q'x''_2, q'x''_3),$$
$$q''x'''_2 = f''_2\,(q'x''_0, q'x''_1, q'x''_2, q'x''_3),$$
$$q''x'''_3 = f''_3\,(q'x''_0, q'x''_1, q'x''_2, q'x''_3),$$

q'' étant un nombre réel différent de zéro.

Enfin nous aurons d'après le § 385

$$qx'_0 = f'''_0\,(q''x'''_0, q''x'''_1, q''x'''_2, q''x'''_3),$$
$$qx'_1 = f'''_1\,(q''x'''_0, q''x'''_1, q''x'''_2, q''x'''_3),$$
$$qx'_2 = f'''_2\,(q''x'''_0, q''x'''_1, q''x'''_2, q''x'''_3),$$
$$qx'_3 = f'''_3\,(q''x'''_0, q''x'''_1, q''x'''_2, q''x'''_3).$$

Nous avons donc d'après le § 301 étendu aux points à coordonnées complexes

$$qx'_0 = f^{\text{IV}}_0\,(x_0, x_1, x_2, x_3),$$
$$qx'_1 = f^{\text{IV}}_1\,(x_0, x_1, x_2, x_3),$$
$$qx'_2 = f^{\text{IV}}_2\,(x_0, x_1, x_2, x_3),$$
$$qx'_3 = f^{\text{IV}}_3\,(x_0, x_1, x_2, x_3),$$

c. à d. que nous avons les relations (1), avec (2) et (3).

Dans l'hypothèse de l'angle obtus, tous les nombres considérés sont réels et les L sont aussi réels. Il reste à démontrer que dans l'hypothèse de l'angle aigu $L_1, L_2, L_3, L'_0, L''_0, L'''_0$ sont chacun purement imaginaire ou nul et $L_0, L'_1, L'_2, L'_3, L''_1, L''_2, L''_3, L'''_1, L'''_2, L'''_3$ réels.

Considérons un point fixe A dont les coordonnées homogènes par rapport aux axes OXYZ sont a_0, a_1, a_2, a_3. Laissons a_0, a_1, a_2, a_3 fixes. D'après le § 382 il existe quatre nombres positifs $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ tels qu'il existe un point P de coordonnées homogènes x_0, x_1, x_2, x_3 par rapport aux axes OXYZ dès que x_0, x_1, x_2, x_3 satisfont aux conditions du § 378 et aux inégalités

(4) $|x_0 - a_0| < \varepsilon_0, |x_1 - a_1| < \varepsilon_1, |x_2 - a_2| < \varepsilon_2, |x_3 - a_3| < \varepsilon_3.$

Prenons $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ assez petits pour que l'on ait $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 0$ dès que x_0, x_1, x_2, x_3 satisfont à (4), x_0 étant purement imaginaire et x_1, x_2, x_3 étant réels.

Soient x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 les coordonnées homogènes du point P par rapport aux axes O'X'Y'Z'. Nous aurons entre x_0, x_1, x_2, x_3 et x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 les relations (1). Or, x'_0 est purement imaginaire et x'_1, x'_2, x'_3 sont réels. Il en résulte que le nombre $L_0x_0 + L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3$ est purement imaginaire et que les nombres $L'_0x_0 + L'_1x_1 + L'_2x_2 + L'_3x_3$, $L''_0x_0 + L''_1x_1 + L''_2x_2 + L''_3x_3$ et $L'''_0x_0 + L'''_1x_1 + L'''_2x_2 + L'''_3x_3$ sont réels dès que x_0, x_1, x_2, x_3 sont quatre nombres satisfaisant à (4), x_0 étant purement imaginaire et x_1, x_2, x_3 étant réels.

Les différents coefficients L sont en général de la forme $\mu + \nu i$, μ et ν étant réels, i désignant $+\sqrt{-1}$. x_0 et a_0 sont de la forme $\xi_0 i$ et $\alpha_0 i$, ξ_0 et α_0 étant réels. L'inégalité $|x_0 - a_0| < \varepsilon_0$ peut être remplacée par

$$|\xi_0 - \alpha_0| < \varepsilon_0.$$

Remplaçons maintenant dans les seconds membres de (1) tous les L par leurs expressions $\mu + \nu i$ et x_0 par $\xi_0 i$. Exprimons que la partie réelle du second membre de la première relation (1) est nulle et que les parties imaginaires des seconds membres des trois autres relations (1) sont nulles. Nous trouvons

$$\begin{aligned}
-\nu_0\xi_0 &+ \mu_1x_1 + \mu_2x_2 + \mu_3x_3 = 0,\\
\mu'_0\xi_0 &+ \nu'_1x_1 + \nu'_2x_2 + \nu'_3x_3 = 0,\\
\mu''_0\xi_0 &+ \nu''_1x_1 + \nu''_2x_2 + \nu''_3x_3 = 0,\\
\mu'''_0\xi_0 &+ \nu'''_1x_1 + \nu'''_2x_2 + \nu'''_3x_3 = 0,
\end{aligned}$$

et ces égalités ont lieu dès que ξ_0, x_1, x_2, x_3 sont quatre nombres réels satisfaisant à (4). Il en résulte que tous les coefficients de ξ_0, x_1, x_2 et x_3 sont nuls et de là résulte immédiatement ce qu'il s'agissait de démontrer.

389. Théorème. *Supposons donnés un système d'axes coordonnés rectangulaires* OXYZ *et une transformation congruente quelconque bien déterminée. Il existe deux systèmes de nombres fixes* L_0, L_1, L_2, L_3, L'_0, L'_1, L'_2, L'_3, L''_0, L''_1, L''_2, L''_3, L'''_0, L'''_1, L'''_2, L'''_3 *et deux seulement jouissant des propriétés suivantes : les nombres* L *satisfont aux égalités* (2) *et* (3) *du* § 388 ; *ils satisfont aux conditions relatives à la réalité*

énumérées dans le § 388 ; *enfin, si* x_0, x_1, x_2, x_3 *sont les coordonnées homogènes par rapport aux axes* OXYZ *d'un point quelconque* P *qui a un homologue* P′ *dans la transformation congruente donnée, et si* x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 *sont les coordonnées homogènes de* P′ *par rapport aux mêmes axes, il y a un nombre réel non nul q tel que les égalités* (1) *du* § 388 *sont satisfaites.*

Démonstration. Démontrons d'abord qu'on peut trouver un système de nombres L possédant les propriétés énumérées.

Soit O_1 un point fixe qui a un homologue O'_1 dans la transformation congruente donnée. Soient $O_1X_1Y_1Z_1$ un système d'axes coordonnés rectangulaires issus de O_1 et $O'_1X'_1Y'_1Z'_1$ les transformés de ces axes coordonnés. Soient

x''_0, x''_1, x''_2, x''_3 les coordonnées homogènes de P par rapport aux axes $O_1X_1Y_1Z_1$,
x'''_0, x'''_1, x'''_2, x'''_3 les coordonnées homogènes de P′ par rapport aux axes $O_1X_1Y_1Z_1$,
x^{IV}_0, x^{IV}_1, x^{IV}_2, x^{IV}_3 les coordonnées homogènes de P′ par rapport aux axes $O'_1X'_1Y'_1Z'_1$.

Au moyen du § 388, nous pouvons exprimer

les x' en fonction des x''',
et les x''' en fonction des x^{IV}.

Les x^{IV} diffèrent des x'' seulement par un facteur réel non nul. Au moyen du § 388 nous pouvons finalement exprimer

les x'' en fonction des x.

De là nous concluons comme au § 388 qu'il existe des constantes L satisfaisant aux égalités (2) et (3) du § 388 telles que les relations (1) du § 388 sont vérifiées pour tous les points P qui ont un transformé dans la transformation congruente donnée.

Soit maintenant A un point fixe qui a un transformé A′. Nous pouvons trouver un nombre positif *m* assez petit pour que sur chaque semi-droite issue de A′ il y ait un point déterminant avec A′ un segment de mesure *m*

(§ 380, démonstration). Soient a_0, a_1, a_2, a_3 les coordonnées homogènes de A par rapport aux axes OXYZ ; laissons les a fixes. Nous pouvons trouver (§ 383) quatre nombres positifs ε_0, ε_1, ε_2, ε_3 suffisamment petits pour qu'il y ait un point P de coordonnées x_0, x_1, x_2, x_3 et pour que $AP < m$ dès que x_0, x_1, x_2, x_3 satisfont aux conditions du § 378 et aux inégalités

(1) $|x_0 - a_0| < \varepsilon_0, \; |x_1 - a_1| < \varepsilon_1, \; |x_2 - a_2| < \varepsilon_2, \; |x_3 - a_3| < \varepsilon_3.$

Les points répondant aux coordonnées satisfaisant aux inégalités (1) auront tous des transformés. Comme x_0, x_1, x_2, x_3 sont arbitraires pourvu qu'ils satisfassent à (1) et aux conditions du § 378, nous pouvons conclure de ce qui précède de la même manière qu'au § 388 que les L satisfont aux conditions relatives à la réalité qui sont énumérées dans l'énoncé du théorème à établir.

Montrons maintenant qu'il existe un deuxième système de nombres L et un seulement. Désignons par l affecté successivement des mêmes accents et indices que les L des nombres jouissant des mêmes propriétés que les L. Lorsque x_0, x_1, x_2, x_3 sont des nombres qui satisfont aux conditions du § 378 et à (1), il y aura toujours un nombre réel non nul q_1 tel que

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & L_0 x_0 + L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 \\ & \qquad = q_1 (l_0 x_0 + l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3), \\ & L'_0 x_0 + L'_1 x_1 + L'_2 x_2 + L'_3 x_3 \\ & \qquad = q_1 (l'_0 x_0 + l'_1 x_1 + l'_2 x_2 + l'_3 x_3), \\ & L''_0 x_0 + L''_1 x_1 + L''_2 x_2 + L''_3 x_3 \\ & \qquad = q_1 (l''_0 x_0 + l''_1 x_1 + l''_2 x_2 + l''_3 x_3), \\ & L'''_0 x_0 + L'''_1 x_1 + L'''_2 x_2 + L'''_3 x_3 \\ & \qquad = q_1 (l'''_0 x_0 + l'''_1 x_1 + l'''_2 x_2 + l'''_3 x_3). \end{aligned} \right.$$

x_0, x_1, x_2, x_3 n'étant pas tous nuls, on a

$$(3) \quad \begin{vmatrix} L_0 - q_1 l_0 & L_1 - q_1 l_1 & L_2 - q_1 l_2 & L_3 - q_1 l_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L'''_0 - q_1 l'''_0 & L'''_1 - q_1 l'''_1 & L'''_2 - q_1 l'''_2 & L'''_3 - q_1 l'''_3 \end{vmatrix} = 0$$

(3) constitue une équation du 4e degré en q_1. Le coefficient de q_1^4 est $\begin{vmatrix} l_0 & \dots & l_3 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ l'''_0 & \dots & l'''_3 \end{vmatrix}$; il vaut 1 en valeur absolue (§ 297 avec l'extension du § 388) et est donc différent de zéro. Il y a au plus quatre racines réelles et positives. Ces racines sont constantes et q_1 est toujours égal à l'une d'elles. On voit aisément que q_1 est une fonction continue de x_0, x_1, x_2 et x_3. q_1 est donc constant. On peut donc conclure de (2) qu'on a

$$\begin{array}{l} L_0 - q_1 l_0 = L_1 - q_1 l_1 = L_2 - q_1 l_2 = L_3 - q_1 l_3 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ L'''_0 - q_1 l'''_0 = L'''_1 - q_1 l'''_1 = L'''_2 - q_1 l'''_2 = L'''_3 - q_1 l'''_3 = 0. \end{array}$$

Comme on a

$$L_0^2 + L'^2_0 + L''^2_0 + L'''^2_0 = l_0^2 + l'^2_0 + l''^2_0 + l'''^2_0,$$

on a $q_1^2 = 1$, $q_1 = \pm 1$; $q_1 = +1$ fournit les L et $q_1 = -1$ fournit le système de nombres obtenu en changeant le signe de chacun des L.

Le théorème est ainsi complètement établi.

390. Théorème. *Supposons donné un système d'axes coordonnés rectangulaires* OXYZ. *Supposons donné un système de nombres* L_0, L_1, L_2, L_3, L'_0, L'_1, L'_2, L'_3, L''_0, L''_1, L''_2, L''_3, L'''_0, L'''_1, L'''_2, L'''_3 *satisfaisant aux égalités* (2) *et* (3) *du* § 388 *et aux conditions relatives à la réalité énumérées dans ce paragraphe. Supposons qu'il existe deux points* A *et* A' *dont les coordonnées homogènes* a_0, a_1, a_2, a_3 *et* a'_0, a'_1, a'_2, a'_3 *vérifient les relations* (1) *du* 388, *q étant un nombre réel non nul convenable. Alors il existe une transformation congruente et une seule jouissant des propriétés suivantes : elle porte* A *en* A' ; *si* x_0. x_1, x_2, x_3 *sont les coordonnées homogènes d'un point* P *qui a un transformé* P' *et si* x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 *sont les coordonnées homogènes de* P', *les x et les x' vérifient les relations* (1) *du* § 388 *moyennant une valeur réelle non nulle convenable donnée à q.*

Démonstration. Soit l un nombre positif et soit (E) l'ensemble des points P tels que

$$AP < l.$$

Si l est assez petit, nous aurons dans l'hypothèse de l'angle obtus pour tout point P de (E)

$$AP < k\frac{\pi}{4},$$

et pour deux points P_1 et P_2 de (E) nous aurons

$$P_1P_2 < k\frac{\pi}{2}.$$

Si l est assez petit, il y aura de plus sur chaque semi-droite issue de A un point déterminant avec A un segment de mesure l et sur chaque semi-droite issue de A' un point déterminant avec A' un segment de mesure l.

Soient x_0, x_1, x_2, x_3 les coordonnées homogènes d'un point quelconque P. Si l est assez petit, les x convenablement choisis resteront arbitrairement voisins des a dès que P appartient à (E) (§ 384). Nous convenons bien entendu de laisser les a et les a' fixes.

Introduisons dans (1), § 388 les coordonnées de P et la valeur de q qui répond aux a et aux a' et résolvons les équations obtenues par rapport aux x'. Si l est assez petit les x' resteront arbitrairement voisins des a' dès que P appartient à (E). Si l est assez petit, il y aura donc un point P' de coordonnées x' dès que P appartient à (E) et $A'P'$ restera dans l'hypothèse de l'angle obtus inférieur à $k\frac{\pi}{4}$ (§ 383). Si maintenant P_1 et P_2 sont deux points de (E) et P'_1 et P'_2 les points que les relations (1), § 388 y font correspondre, nous aurons dans l'hypothèse de l'angle obtus

$$P'_1P'_2 < k\frac{\pi}{2}$$

dès que l est assez petit.

l étant pris assez petit pour que toutes les circonstances

que nous venons de passer en revue se produisent, nous laisserons l fixe.

Les relations (1) du § 388 fournissent une transformation (T) de (E) en un ensemble de points situés aux environs de A'. Si P_1 et P_2 sont deux points de (E) et P'_1, P'_2 leurs transformés, on voit aisément par le § 381 en tenant compte des égalités (2) et (3) du § 388 qu'on a

$$\left|\cos\frac{P_1P_2}{k}\right| = \left|\cos\frac{P'_1P'_2}{k}\right|.$$

Comme P_1P_2 et $P'_1P'_2$ sont inférieurs à $k\frac{\pi}{2}$ dans l'hypothèse de l'angle obtus, les cosinus eux-mêmes sont toujours égaux, $P_1P_2 = P'_1P'_2$ et les segments (P_1P_2) et $(P'_1P'_2)$ sont congruents entre eux.

Prenons maintenant trois points A_1, A_2, A_3 de (E) non situés dans un même plan avec A. Soient A'_1, A'_2, A'_3 leurs transformés. Il y a une transformation congruente (T_1) et une seule qui porte A en A', A_1 en A'_1, A_2 en A'_2 et A_3 en A'_3 (§ 192).

Etant donnée une transformation congruente (T'_1) satisfaisant à la question, tout point de (E) a un transformé dans (T'_1); A_1, A_2, A_3 ont donc des transformés. Il est clair que ces transformés doivent être identiques à A'_1, A'_2, A'_3. (T'_1) est donc identique à (T_1).

Montrons maintenant que (T_1) satisfait à la question. Désignons par l affecté successivement d'indices et d'accents convenables les coefficients répondant à (T_1) dont il est question au § 389. Dès que x_0, x_1, x_2, x_3 sont assez voisins de a_0, a_1, a_2, a_3 respectivement, il existe un point P dont les coordonnées sont x_0, x_1, x_2, x_3 et ce point appartient à (E). Alors les seconds membres des relations (1) du § 388 où les L ont les valeurs données dont il est question dans l'énoncé du théorème à démontrer et les mêmes seconds membres où les L sont remplacés par les l diffèrent par un facteur réel non nul. On en déduit comme au § 389 que les l sont égaux aux L multipliés tous par $+1$ ou tous par -1. La transformation (T_1) satisfait donc à la question.

Remarque. Plaçons-nous dans l'hypothèse de l'angle obtus. Si P'_1 et P'_2 sont deux points dont les coordonnées sont fournies en fonction de celles de P_1 et de P_2 par les relations (1) du § 388, les égalités (2) et (3) du § 388 nous permettent seulement de conclure que

$$\left| \cos \frac{P_1P_2}{k} \right| = \left| \cos \frac{P'_1P'_2}{k} \right|.$$

D'après ce qui vient d'être établi, on a $P_1P_2 = P'_1P'_2$ dès que P_1 et P_2 ont des homologues dans la transformation congruente dont nous avons établi l'existence. Si P_1 et P_2 n'avaient pas d'homologues, il se pourrait tout de même qu'il existe des points P'_1 et P'_2, mais alors on pourrait peut-être avoir $P_1P_2 + P'_1P'_2 = k\pi$. Il en résulte que dans l'hypothèse de l'angle obtus on ne peut pas affirmer que tous les points qui se correspondent en vertu des relations (1) du § 388 se correspondent aussi dans une même transformation congruente.

Dans l'hypothèse de l'angle aigu au contraire, on peut conclure de l'égalité entre les modules des cosinus à l'égalité entre les arguments et tous les points qui se correspondent en vertu des relations (1) du § 388 se correspondent dans une même transformation congruente et cette transformation congruente est identique à celle dont nous avons établi l'existence.

391. Théorème. *Supposons donné un système d'axes coordonnés rectangulaires* OXYZ. *Etant donné un plan, on peut trouver quatre constantes non toutes nulles a_0, a_1, a_2, a_3, ces constantes étant réelles dans l'hypothèse de l'angle obtus, a_0 étant purement imaginaire ou nul et a_1, a_2, a_3 réels dans l'hypothèse de l'angle aigu, et telles que*

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

soit l'équation du plan donné, les x désignant les coordonnées courantes par rapport aux axes OXYZ.

Démonstration. Soit O'X'Y'Z' un système d'axes coordonnés rectangulaires tel que le plan O'X'Y' coïncide avec le plan donné. On voit immédiatement que l'équa-

tion du plan $O'X'Y'$ rapporté aux axes $O'X'Y'Z'$ est

$$x'_3 = 0,$$

x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 désignant les coordonnées d'un point quelconque par rapport aux axes $O'X'Y'Z'$.

Or, pour tout point de l'espace on a (§ 388)

$$qx'_3 = a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3,$$

les a étant des constantes qui satisfont aux conditions de l'énoncé.

De là résulte immédiatement le théorème à établir.

392. Théorème. *Supposons donnés un système d'axes coordonnés rectangulaires* OXYZ *et une équation de la forme*

$$(1) \qquad a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,$$

où les x sont les variables et les a des constantes non toutes nulles, les a étant réels dans l'hypothèse de l'angle obtus, a_0 étant purement imaginaire ou nul et a_1, a_2, a_3 réels dans l'hypothèse de l'angle aigu. S'il y a un point P' *dont les coordonnées x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 par rapport aux axes* OXYZ *vérifient l'équation* (1), *cette équation représente un plan.*

Démonstration. Supposons pour fixer les idées $x'_0 \neq 0$. Alors a_1, a_2 et a_3 ne sont pas tous nuls. Supposons par exemple $a_3 \neq 0$. Soient $\Delta x'_1$ et $\Delta x'_2$ deux nombres réels non nuls. On a toujours

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} x'_0 & x'_1 & x'_2 \\ x'_0 & x'_1 + \Delta x'_1 & x'_2 \\ x'_0 & x'_1 & x'_2 + \Delta x'_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Remplaçons dans (1) x_0, x_1, x_2 successivement par x'_0, $x'_1 + \Delta x'_1$, x'_2 et par x'_0, x'_1, $x'_2 + \Delta x'_2$ et résolvons chaque fois l'équation obtenue par rapport à x_3 ; soient x''_3 et x'''_3 les valeurs de x_3 obtenues. Si $\Delta x'_1$ et $\Delta x'_2$ sont assez petits, x'_0, $x'_1 + \Delta x'_1$, x'_2, x''_3 et x'_0, x'_1, $x'_2 + \Delta x'_2$, x'''_3 seront arbitrairement voisins de x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 et il y aura des points P'' et P''' ayant pour coordonnées x'_0, $x'_1 + \Delta x'_1$, x'_2, x''_3 et x'_0, x'_1, $x'_2 + \Delta x'_2$, x'''_3. Soit α un plan passant par P', P'' et P'''. L'équation de α est de la forme

$$(3) \qquad a'_0x_0 + a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 = 0 \quad (\S\ 391)$$

(1) et (3) sont chacun vérifiés par les coordonnées de P′, P″ et P‴. On en déduit d'après (2) que les a' sont proportionnels aux a. (1) et (3) sont donc équivalents et (1) représente également α.

393. Théorème. *Supposons donné un système d'axes coordonnés rectangulaires OXYZ et une droite d. On peut trouver huit constantes a_0, a_1, a_2, a_3 et b_0, b_1, b_2, b_3 jouissant des propriétés suivantes : les a et les b sont tous réels dans l'hypothèse de l'angle obtus ; dans l'hypothèse de l'angle aigu, a_0 et b_0 sont chacun purement imaginaire ou nul, les autres a et les autres b sont réels ; on a*

$$\left\| \begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \right\| \neq 0,$$

et le système des deux équations

$$\begin{aligned} a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= 0, \\ b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 &= 0, \end{aligned}$$

où les x sont les coordonnées courantes, représente la droite d.

Démonstration. Il suffit pour établir ce théorème de considérer deux plans distincts passant par d et d'appliquer le § 391.

394. Théorème. *Supposons donnés un système d'axes coordonnés rectangulaires OXYZ et un système d'équations de la forme*

$$\begin{aligned} a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= 0, \\ b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 &= 0, \end{aligned}$$

où les x sont les variables et où les a et les b sont des constantes. Nous supposons les a non tous nuls ainsi que les b ; nous supposons les a et les b réels dans l'hypothèse de l'angle obtus ; nous supposons a_0 et b_0 chacun purement imaginaire ou nul et les autres constantes réelles dans l'hypothèse de l'angle aigu. Nous supposons

$$\left\| \begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \right\| \neq 0,$$

et enfin nous admettons qu'il existe un point P′ dont les coordonnées homogènes par rapport aux axes OXYZ vérifient les deux équations données. Dans ces conditions, le système des deux équations données représente une droite.

Démonstration. Il suffit pour établir ce théorème d'appliquer le § 392 et de remarquer que si les plans représentés par les deux équations coïncidaient, la matrice de déterminants formée avec les a et les b serait nulle.

395. Théorème. *Si* A (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3) *et* B $(x''_0, x''_1, x''_2, x''_3)$ *sont deux points distincts et si* C $(x'''_0, x'''_1, x'''_2, x'''_3)$ *est un point de la droite* AB, *il existe deux nombres réels p et q tels que l'on a* .

$$(1) \qquad \begin{cases} x'''_0 = px'_0 + qx''_0, & x'''_1 = px'_1 + qx''_1, \\ x'''_2 = px'_2 + qx''_2, & x'''_3 = px'_3 + qx''_3. \end{cases}$$

Démonstration. A et B étant distincts, on a

$$\left\| \begin{matrix} x'_0 & x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_0 & x''_1 & x''_2 & x''_3 \end{matrix} \right\| \neq 0.$$

Supposons par exemple

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} x'_0 & x'_1 \\ x''_0 & x''_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Soient

$$(3) \qquad a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,$$

$$(4) \qquad b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$$

les équations de la droite AB. En exprimant que les coordonnées de A, de B et de C vérifient (3) et (4), on constate que les a et les b vérifient tous les deux un même système de trois équations linéaires et homogènes à quatre inconnues; les coefficients dans ces trois équations sont respectivement les x', les x'' et les x'''. Si la matrice de déterminants formée avec ces coefficients était différente de zéro, les a seraient proportionnels aux b, ce qui n'est pas le cas (§ 393). On a donc

$$(5) \qquad \left\| \begin{matrix} x'_0 & x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_0 & x''_1 & x''_2 & x''_3 \\ x'''_0 & x'''_1 & x'''_2 & x'''_3 \end{matrix} \right\| = 0.$$

D'après (2) on peut résoudre les deux premières équations (1); on voit immédiatement que les valeurs trouvées pour p et q sont réelles. D'après (5) ces valeurs vérifient les autres équations (1).

CHAPITRE XVI.

Espaces complets des géométries hyperbolique, euclidienne et elliptique.

396. Les postulats de la géométrie générale laissent subsister une indétermination relativement à la question de savoir de combien un segment peut être prolongé. Cette indétermination est apparue au § 380 sous une autre forme : dans ce paragraphe nous avons vu qu'on ne peut pas affirmer qu'à tout système de valeurs des coordonnées satisfaisant aux conditions du § 378 répond un point ; et le domaine de variation des coordonnées à l'intérieur duquel il répond toujours un point à des coordonnées données à l'avance, mais à l'extérieur duquel cela n'est jamais le cas, est indéterminé. Nous nous proposons maintenant de modifier le système de postulats de la géométrie générale de façon à faire disparaître cette indétermination. Pour cela, nous allons modifier ce système de postulats de manière à pouvoir y introduire le postulat III 1 du § 3. Comme nous le verrons, il répondra alors un point à tout système de valeurs des coordonnées satisfaisant aux conditions du § 378. Pour exécuter ces modifications de notre système de postulats du § 10, il sera utile de distinguer entre les trois hypothèses.

397. Hypothèse de l'angle aigu.

Ajoutons aux postulats du § 10 l'hypothèse de l'angle aigu et le postulat III 1 du § 3. La géométrie édifiée sur ces bases est exempte de contradictions (§ 281). *Cette géométrie est par définition la géométrie hyperbolique.*

Tous les théorèmes de la branche de la géométrie générale basée sur l'hypothèse de l'angle aigu sont vrais dans la géométrie hyperbolique. Tous les postulats de

la géométrie euclidienne sauf le postulat des parallèles sont aussi vrais dans cette géométrie; le postulat des parallèles y est faux. Dans la géométrie hyperbolique l'indétermination relative au prolongement des segments a disparu ; la droite est infinie dans cette géométrie. Le théorème suivant lève de plus l'indétermination relative au domaine de variation des coordonnées.

Théorème. *Supposons donné dans l'espace hyperbolique un système d'axes coordonnés rectangulaires* OXYZ. *Etant donné un système de quatre nombres quelconques* x_0, x_1, x_2, x_3, *le nombre* x_0 *étant purement imaginaire,* x_1, x_2, x_3 *étant réels et* $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ *étant négatif, il existe toujours un point et un seul qui a ces nombres comme coordonnées homogènes par rapport aux axes* OXYZ.

Démonstration. Ce théorème résulte de ce qui a été vu dans la démonstration du § 380 et du postulat III 1 du § 3.

L'identité entre la géométrie hyperbolique telle que nous venons de la définir et la géométrie découverte par Lobatchevskij dont nous avons parlé au § 8 ressort du théorème suivant.

Théorème. *Etant donnés dans l'espace hyperbolique une droite d et un point* O *non situé sur d, il existe deux droites distinctes* p_1 *et* p_2 *passant par* O, *situées dans le plan déterminé par* O *et d, ne coupant pas d et telles que toute droite passant par* O *située dans l'un des deux couples d'angles opposés par le sommet formés par* p_1 *et* p_2 *coupe d, tandis que toute droite passant par* O *située dans l'autre couple d'angles opposés par le sommet formé par* p_1 *et* p_2 *ne coupe pas d.*

Démonstration. Nous pouvons abaisser la perpendiculaire de O sur *d* (§ 210) ; soit A le pied de cette perpendiculaire et soit *a* la mesure de (OA). Prenons O comme origine des axes coordonnés et |OA comme axe |OY ; prenons comme axe |OX une semi-droite issue de O, située dans le plan de O et *d* et faisant avec |OY un angle droit ; prenons comme axe |OZ une semi-droite issue de O dont le support est normal au plan de O et de *d*.

Soit P un point quelconque de *d*. Menons OP. En employant les notations ordinaires, nous aurons dans le

triangle OAP

$$\operatorname{tg}\frac{a}{k} = \operatorname{tg}\frac{\rho}{k}\beta,$$

$$\cos\frac{\rho}{k}\operatorname{tg}\frac{a}{k} = \beta\sin\frac{\rho}{k}\cdot$$

Les équations de d sont donc

$$(1)\qquad \begin{cases} x_3 = 0, \\ x_0 \operatorname{tg}\frac{a}{k} = x_2. \end{cases}$$

Soit θ un nombre réel quelconque satisfaisant à $0 < \theta < \pi$. Considérons la semi-droite s issue de O et située dans le plan de O et de d du même côté de OX que A et faisant avec |OX un angle de mesure θ. Pour un point quelconque M du support de s on a

$$\alpha = \pm\cos\theta,$$
$$\beta = \pm\sin\theta,$$
$$\alpha\sin\frac{\rho}{k}\sin\theta = \beta\sin\frac{\rho}{k}\cos\theta.$$

Les équations du support de s sont donc

$$(2)\qquad \begin{cases} x_3 = 0, \\ x_1\sin\theta = x_2\cos\theta. \end{cases}$$

Le système de valeurs suivant des x vérifie à la fois (1) et (2) :

$$(3)\qquad x_0 = \frac{\sin\theta}{\operatorname{tg}\frac{a}{k}},\ x_1 = \cos\theta,\ x_2 = \sin\theta,\ x_3 = 0.$$

x_0 est purement imaginaire, x_1, x_2, x_3 sont réels et tous les x ne sont pas simultanément nuls. S'il y a un point I commun à (1) et à (2), on peut prendre les nombres (3) comme coordonnées homogènes de ce point et s'il y a un point qui a (3) comme coordonnées homogènes, il est commun à (1) et à (2).

Mais la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait un point I ayant (3) comme coordonnées homogènes

est que les nombres (3) satisfassent à $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 0$, c. à d.

$$1 + \frac{\sin^2 \theta}{\operatorname{tg}^2 \frac{a}{k}} < 0. \tag{4}$$

Pour $\theta = 0$, le premier membre de (4) est positif. Quand θ croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, le premier membre de (4) décroît constamment. Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, le premier membre de (4) vaut $1 + \dfrac{\cos^2 \frac{a}{k}}{\sin^2 \frac{a}{k}}$ ou $1 - \dfrac{\operatorname{ch}^2 \frac{a}{|k|}}{\operatorname{sh}^2 \frac{a}{|k|}}$; comme $\operatorname{ch} \frac{a}{|k|} > \operatorname{sh} \frac{a}{|k|}$, cette quantité est négative; cela doit être ainsi puisque OY et d ont le point A en commun. Quand θ croît de $\frac{\pi}{2}$ à π, le premier membre de (4) croît de $1 - \dfrac{\operatorname{ch}^2 \frac{a}{|k|}}{\operatorname{sh}^2 \frac{a}{|k|}}$ à 1. Il y a donc deux valeurs θ_1 et θ_2 de θ satisfaisant à

$$0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < \theta_2 < \pi, \quad \theta_1 + \theta_2 = \pi$$

pour lesquelles le premier membre de (4) est nul. Pour $0 < \theta < \theta_1$, le premier membre de (4) est positif ou nul et le support de s ne coupe pas d; pour $\theta_1 < \theta < \theta_2$, le premier membre de (4) est négatif et le support de s coupe d; pour $\theta_2 < \theta < \pi$, le premier membre de (4) est positif ou nul et le support de s ne coupe pas d. De là on déduit immédiatement le théorème à démontrer.

Ainsi la branche de la géométrie générale basée sur l'hypothèse de l'angle aigu conduit à la première des deux géométries non-euclidiennes. Le résultat que nous avons annoncé au § 11 est donc actuellement acquis pour ce qui concerne cette première géométrie non-euclienne.

Maintenant nous abandonnons la géométrie hyperbolique et nous passons à l'hypothèse de l'angle droit.

398. Hypothèse de l'angle droit. Ajoutons aux postulats du § 10 et à l'hypothèse de l'angle droit le postulat III 1 du § 3. La géométrie édifiée sur ces bases est exempte de contradictions (§ 215) et d'après le § 214 elle est identique à la géométrie euclidienne ou parabolique.

399. Hypothèse de l'angle obtus. Dans cette hypothèse, on ne peut pas arriver au but en ajoutant simplement le postulat III 1 du § 3 aux postulats du § 10, puisque le postulat III 1 du § 3 est en contradiction avec les postulats du § 10 et l'hypothèse de l'angle obtus. Cela résulte par exemple du § 212 ou aussi du § 342. On a de plus le théorème suivant.

Théorème. *Dans l'hypothèse de l'angle obtus il est impossible qu'à tout système de quatre nombres réels* x_0, x_1, x_2, x_3 *non simultanément nuls réponde un point qui ait ces nombres comme coordonnées homogènes par rapport à un système d'axes coordonnés donné fixe* OXYZ.

Démonstration. Pour tout point de OX distinct de O on a $x_1 \neq 0$, $x_2 = x_3 = 0$. Réciproquement, si l'on a pour un point $x_1 \neq 0$ et $x_2 = x_3 = 0$, ce point est sur OX et est distinct de O. Nous pouvons d'ailleurs toujours choisir les coordonnées homogènes d'un point de OX distinct de O de manière que $x_1 = 1$, et si pour un point on a $x_1 \neq 0$, nous pouvons choisir ses coordonnées homogènes de manière que $x_1 = 1$.

Supposons maintenant que le théorème à démontrer soit faux. Alors il existe d'après ce qui vient d'être dit une correspondance parfaite entre tous les points de OX distincts de O et tous les systèmes de valeurs réelles de x_0, x_1, x_2, x_3 tels que $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 0$, c. à d. qu'il y a une correspondance parfaite entre tous les points de OX distincts de O et toutes les valeurs réelles de la variable x_0. On a, en employant les notations ordinaires,

$$\cos\frac{\rho}{k} = \frac{x_0}{\pm\sqrt{x_0^2+1}},$$

$$\alpha \sin\frac{\rho}{k} = \frac{1}{\pm\sqrt{x_0^2+1}}.$$

Quand x_0 est positif et assez grand, il faudra prendre la détermination de $\frac{\rho}{k}$ inférieure à $\frac{\pi}{2}$; alors il faudra prendre le signe $+$ devant le radical, on aura $\alpha = +1$ et l'on trouvera un point de |OX. Quand x_0 est négatif et assez grand en valeur absolue, il faudra prendre encore la détermination de $\frac{\rho}{k}$ inférieure à $\frac{\pi}{2}$; il faudra alors prendre le signe $-$ devant le radical, on aura $\alpha = -1$ et l'on trouvera un point de la semi-droite opposée à |OX.

Si un point P′ est sur |OX et un point P″ sur la semi-droite opposée à |OX, et si x'_0 et x''_0 sont les valeurs de x_0 répondant à P′ et à P″, on a $x'_0 > x''_0$, car si l'on avait $x''_0 > x'_0$, on aurait $\frac{x''_0}{+\sqrt{x''^2_0+1}} > \frac{x'_0}{+\sqrt{x'^2_0+1}}$ et il existerait un point entre O et P′ pour lequel on aurait $x_0 = x''_0$, ce qui est impossible.

Il existe donc un nombre X_0 tel que pour $x_0 > X_0$ on trouve un point de |OX et pour $x_0 < X_0$ on trouve un point de la semi-droite opposée à |OX. Par hypothèse il existe un point pour lequel on a $x_0 = X_0$. On voit aisément que ce point ne peut se trouver ni sur |OX ni sur la semi-droite opposée.

La négation du théorème nous a conduit ainsi à une absurdité et le théorème est établi.

De tout cela il résulte que pour atteindre le but que nous nous sommes proposés au § 396, il faudra faire subir aux postulats du § 10 une modification plus profonde. Nous allons nous occuper de cette modification à partir du paragraphe suivant jusqu'au § 439, inclusivement.

400. Concept fondamental. Nous imaginons une espèce d'objets que nous appelons *points*.

Postulat I. *Il existe au moins un point.*

Définition. Nous appelons *espace* l'ensemble de tous les points qui existent.

Concept fondamental. Nous imaginons une espèce d'ensembles de points que nous appelons *régions normales*.

Postulat II. *Tout point appartient à une région normale.*

Postulat III. *Supposons donnée une région normale quelconque. Considérons l'ensemble des points de cette région en faisant abstraction des points qui n'y appartiennent pas. La région normale donnée ainsi considérée en elle-même satisfait à tous les postulats du* § 10 *et à l'hypothèse de l'angle obtus.*

Remarque. Le postulat III affirme en d'autres mots qu'entre les points d'une région normale existent des relations que nous exprimons par les mots « points situés en ligne droite, points situés dans un même plan, situé entre, congruent », etc., relations que nous nous abstenons de définir, et que les points d'une région normale et leurs relations mutuelles satisfont aux postulats du § 10 et à l'hypothèse de l'angle obtus.

L'espace tel que nous l'envisageons actuellement ne joue plus le même rôle vis à vis des postulats du § 10 que l'espace de la géométrie générale. Ce sont les régions normales qui jouent actuellement le rôle de ce dernier.

Postulat IV. *Étant donnés deux points distincts* A *et* B, *il existe un nombre fini de régions normales* (R_1), (R_2), (R_3), ..., (R_n) *et un nombre fini de points* A_1, A_2, A_3, ..., A_n *jouissant des propriétés suivantes :* A, A_1 *et* A_2 *sont distincts, appartiennent à* (R_1) *et y sont en ligne droite,* A_1 *étant entre* A *et* A_2 ; A_1, A_2 *et* A_3 *sont distincts, appartiennent à* (R_2) *et y sont en ligne droite,* A_2 *étant entre* A_1 *et* A_3 ; A_2, A_3 *et* A_4 *sont distincts, appartiennent à* (R_3) *et y sont en ligne droite,* A_3 *étant entre* A_2 *et* A_4 ; *et ainsi de suite ; finalement* A_{n-1}, A_n *et* B *sont distincts, appartiennent à* (R_n) *et y sont en ligne droite,* A_n *étant entre* A_{n-1} *et* B.

Remarque. Dans le postulat IV rien n'est affirmé quant à la question de savoir si les différentes régions (R) sont toutes distinctes l'une de l'autre.

Postulat V. *Supposons données deux régions normales* (R_1) *et* (R_2) *ayant au moins un point commun. Désignons par* $(R_1)(R_2)$ *l'ensemble des points communs à* (R_1) *et à* (R_2). *Si* A *et* B *sont deux points distincts de* $(R_1)(R_2)$ *et si un point* C *de* $(R_1)(R_2)$ *appartient à la droite* AB *quand on considère* A, B *et* C *comme situés dans l'une des deux régions* (R_1) *ou* (R_2), C *appartient*

encore à AB *quand on considère les trois points* A, B *et* C *comme situés dans l'autre région.*

Postulat VI. *Soient* A *et* B *deux points distincts de* $(R_1)(R_2)$ $[(R_1)$, (R_2) *et* $(R_1)(R_2)$ *ont la même signification que dans l'énoncé du postulat* V]. *Si* C *est un point de l'une des deux régions* (R_1) *ou* (R_2) *situé dans cette région sur la droite* AB *entre* A *et* B, C *appartient à l'autre région et y est situé sur la droite* AB *entre* A *et* B.

Postulat VII. *Soient* A, B *et* C *trois points de* $(R_1)(R_2)$ $[(R_1)$, (R_2) *et* $(R_1)(R_2)$ *ont la même signification que dans l'énoncé du postulat* V] *qui ne sont pas situés sur une même droite de* (R_1) *ou de* (R_2). *Si* D *est un point de* $(R_1)(R_2)$ *appartenant au plan* ABC *quand on considère* A, B, C *et* D *comme situés dans l'une des deux régions* (R_1) *ou* (R_2), D *appartient encore au plan* ABC *quand on considère les quatre points comme situés dans l'autre région.*

Postulat VIII. *Soient* A *et* B, A′ *et* B′ *deux couples de points distincts de* $(R_1)(R_2)$ $[(R_1)$, (R_2) *et* $(R_1)(R_2)$ *ont la même signification que dans l'énoncé du postulat* V]. *Nous savons d'après le postulat* VI *que les deux segments* (AB) *et* (A′B′) *sont chacun constitué par le même ensemble de points soit que l'on considère* A, B, A′, B′ *comme appartenant à* (R_1), *soit que l'on considère ces points comme appartenant à* (R_2). *Si maintenant* (AB) *et* (A′B′) *sont congruents entre eux lorsque l'on considère les points* A, B, A′ *et* B′ *comme situés dans l'une des deux régions* (R_1) *ou* (R_2), *ces deux segments sont encore congruents lorsqu'on considère leurs extrémités comme situées dans l'autre région.*

Postulat IX. *Soient* A, B, C *et* A′, B′, C′ *deux groupes de trois points de* $(R_1)(R_2)$ $[(R_1)$, (R_2) *et* $(R_1)(R_2)$ *ont la même signification que dans l'énoncé du postulat* V]. *Nous supposons les trois points de chaque groupe non situés en ligne droite dans* (R_1) *ou* (R_2). *Si les angles* $\measuredangle$ ABC *et* $\measuredangle$ A′B′C′ *sont congruents entre eux lorsque l'on considère les points* A, B, C, A′, B′ *et* C′ *comme situés dans l'une des deux régions* (R_1) *ou* (R_2), *ces angles sont encore congruents lorsqu'on considère les six points comme situés dans l'autre région.*

Postulat X. *Supposons données deux régions normales* (R_1)

et (R_2) *ayant au moins un point commun et soit* $(R_1)(R_2)$ *l'ensemble des points communs aux deux régions normales données. Si* A *est un point quelconque fixe de* $(R_1)(R_2)$, *il existe dans l'une des deux régions normales données, par exemple dans* (R_1), *un segment fixe* (UV) *tel que sur toute semi-droite de* (R_1) *issue de* A *existe un point de* (R_1) *déterminant avec* A *un segment congruent à* (UV) *et tel que tout point de* (R_1) *déterminant avec* A *un segment congruent à* (UV) *est situé dans* $(R_1)(R_2)$.

Remarque. On voit aisément que s'il y a un segment tel que (UV) dans l'une des deux régions (R_1) ou (R_2), il y en a aussi un dans l'autre.

Définitions. Considérons deux régions normales (R_1) et (R_2) ayant au moins un point commun et désignons par (R_1) (R_2) l'ensemble des points communs à (R_1) et à (R_2).

Nous appellerons *droite* de (R_1) (R_2) l'ensemble des points communs à $(R_1)(R_2)$ et à une droite de (R_1) ou de (R_2) dont au moins un point se trouve dans $(R_1)(R_2)$.

Nous appellerons *plan* de (R_1) (R_2) l'ensemble des points communs à (R_1) (R_2) et à un plan de (R_1) ou de (R_2) dont au moins un point se trouve dans $(R_1)(R_2)$.

Si A et B sont deux points distincts de $(R_1)(R_2)$, ils déterminent dans (R_1) une droite a_1 et dans (R_2) une droite a_2. L'ensemble des points communs à a_1 et à $(R_1)(R_2)$ est identique à l'ensemble des points communs à a_2 et à (R_1) (R_2) (postulat V) et constitue la droite de (R_1) (R_2) déterminée par A et B. Les points et les droites de (R_1) (R_2) satisfont donc au postulat I 1 du § 10. Si a est une droite de (R_1) (R_2), il existe par définition dans l'une des deux régions (R_1) ou (R_2), par exemple dans (R_1), une droite a_1 contenant au moins un point A de (R_1) (R_2) et telle que a est l'ensemble des points communs à $(R_1)(R_2)$ et à a_1. On peut trouver sur a_1 un point B distinct de A appartenant à $(R_1)(R_2)$ (postulat X). B appartient à a. A et B déterminent dans (R_2) une droite a_2 et d'après ce que nous venons de voir a est aussi l'ensemble des points communs à (R_1) (R_2) et à a_2. Toute droite de (R_1) (R_2) est

donc à la fois l'ensemble des points communs à $(R_1)(R_2)$ et à une droite de (R_1) d'une part et de (R_2) d'autre part. La même remarque est valable pour tout plan de $(R_1)(R_2)$.

Par des raisonnements analogues à ceux que nous venons de faire on constate que les points, droites et plans de $(R_1)(R_2)$ satisfont à tous les postulats de l'appartenance de la géométrie générale et au théor. I 1 du § 10.

Etant donnés trois points distincts A, B et C d'une droite de $(R_1)(R_2)$, B est entre A et C dans (R_2) si B est entre A et C dans (R_1) et réciproquement (postulat VI). Si B est ainsi situé entre A et C dans (R_1) et dans (R_2), nous dirons que B est *situé entre* A et C dans $(R_1)(R_2)$.

On constate immédiatement que les trois premiers postulats de l'ordre de la géométrie générale sont valables dans la région $(R_1)(R_2)$.

Nous définissons maintenant le *segment* de $(R_1)(R_2)$ défini par deux points distincts A et B de $(R_1)(R_2)$ comme au § 10. On constate immédiatement que les segments (AB) de (R_1), de (R_2) et de $(R_1)(R_2)$ sont identiques entre eux et que le postulat II 4 du § 10 est vrai dans la région $(R_1)(R_2)$.

Comme tous les postulats de l'ordre du § 10 sont vrais dans $(R_1)(R_2)$, les théorèmes II 1 et II 2 du § 10 y sont aussi vrais, et nous pouvons définir la *semi-droite* et *l'angle* dans $(R_1)(R_2)$ comme au § 10. On voit aisément que toute semi-droite |OA de $(R_1)(R_2)$ est à la fois l'ensemble des points communs à $(R_1)(R_2)$ et à la semi-droite |OA de (R_1) d'une part et de (R_2) d'autre part. Réciproquement, l'ensemble des points communs à $(R_1)(R_2)$ et à une semi-droite de (R_1) ou de (R_2) dont l'origine appartient à $(R_1)(R_2)$ est une semi-droite de $(R_1)(R_2)$.

Le théorème II 3 du § 10 est vrai dans $(R_1)(R_2)$ et nous pouvons définir le *demi-plan* dans $(R_1)(R_2)$ comme au § 10. Supposons donné un demi-plan α dans $(R_1)(R_2)$; soient A et B deux points distincts de la droite qui le limite et soit C un de ses points non situé sur AB; α est l'ensemble des points communs à $(R_1)(R_2)$ et au demi-

plan de (R_1) ou de (R_2) limité à la droite AB de (R_1) ou de (R_2) et contenant C. Réciproquement l'ensemble des points communs à $(R_1)(R_2)$ et à un demi-plan α_1 de (R_1) ou de (R_2) est un demi-plan de $(R_1)(R_2)$, pourvu que l'un au moins des points de la droite qui limite α_1 appartienne à $(R_1)(R_2)$. Le théor. II 4 du § 10 est vrai dans $(R_1)(R_2)$.

Nous dirons que deux segments de $(R_1)(R_2)$ sont *congruents* entre eux si ces segments sont congruents entre eux quand on considère leurs extrémités comme appartenant à (R_1) ou à (R_2).

Soient (a, b) et (a', b') deux angles de $(R_1)(R_2)$. Soient a_1, b_1, a'_1, b'_1 les semi-droites de (R_1) répondant à a, b, a', b' et a_2, b_2, a'_2, b'_2 les semi-droites de (R_2) répondant à a, b, a', b'. Lorsque $(a_1, b_1) \equiv (a'_1, b'_1)$ on a $(a_2, b_2) \equiv (a'_2, b'_2)$ et réciproquement (postulat IX), et nous dirons alors que dans $(R_1)(R_2)$ les angles (a, b) et (a', b') sont *congruents* entre eux.

On constate maintenant aisément que les postulats de la congruence et de la continuité de la géométrie générale sont valables dans $(R_1)(R_2)$.

On voit de plus aisément que les mesures des segments et des angles de $(R_1)(R_2)$ sont égales aux mesures des mêmes éléments quand on les considère comme appartenant à (R_1) ou à (R_2), l'unité restant la même. De là résulte immédiatement que l'hypothèse de l'angle obtus est vraie dans $(R_1)(R_2)$.

Nous pouvons résumer ce que nous venons de voir de la manière suivante.

Théorème I. *La région commune à deux régions normales qui ont au moins un point commun satisfait aux postulats de la géométrie générale et à l'hypothèse de l'angle obtus.*

Théorème II. *Supposons donnée une suite de régions normales* $(R_1), (R_2), \ldots, (R_n)$; *nous supposons que deux régions consécutives quelconques ont au moins un point commun ;* (R_n) *et* (R_1) *sont aussi supposées avoir au moins un point commun. Supposons donnés un segment* (A_1B_1) *dans* $(R_1)(R_2)$, *un segment* (A_2B_2) *dans* $(R_2)(R_3), \ldots$, *un segment* (A_nB_n) *dans* $(R_n)(R_1)$; *supposons qu'on a* $(A_1B_1) \equiv (A_2B_2)$ *dans* (R_2) ; $(A_2B_2) \equiv (A_3B_3)$

dans (R_3) ; ... ; $(A_{n-1}B_{n-1}) \equiv (A_nB_n)$ *dans* (R_n). *Alors les segments* (A_nB_n) *et* (A_1B_1) *sont congruents entre eux dans* (R_1).

Démonstration. Plaçons-nous dans (R_1) et désignons par k_1 la valeur obtenue pour le paramètre k du § 349 lorsqu'on prend (A_1B_1) comme unité de longueur. D'après le théorème I tous les théorèmes de la géométrie générale sont aussi valables dans la région $(R_1)(R_2)$; si donc nous prenons dans $(R_1)(R_2)$ le segment (A_1B_1) comme unité, il y aura un nombre k'_1 qui jouera dans $(R_1)(R_2)$ exactement le même rôle que celui joué par le paramètre k du § 349 dans l'espace de la géométrie générale. Or, il résulte des postulats que nous avons énoncés jusqu'ici dans ce paragraphe que le nombre k_1 jouit de la propriété qui caractérise le nombre k'_1 (cette propriété est celle envisagée au § 341). On a donc $k_1 = k'_1$.

On voit de la même manière que k_1 est la valeur obtenue pour le paramètre k du § 349 lorsqu'on se place dans (R_2) et y prend (A_1B_1) comme unité. Comme on a $(A_1B_1) \equiv (A_2B_2)$ dans (R_2), k_1 est encore la valeur obtenue pour le paramètre k du § 349 lorsqu'on se place dans (R_2) et y prend (A_2B_2) comme unité.

On trouve ainsi de proche en proche que k_1 est la valeur obtenue pour le paramètre k du § 349 lorsqu'on se place dans (R_n) et y prend (A_nB_n) comme unité. Finalement, k_1 est la valeur obtenue pour le paramètre k du § 349 lorsqu'on se place dans (R_1) et y prend (A_nB_n) comme unité. D'après le § 346 on a donc dans (R_1)

$$(A_nB_n) \equiv (A_1B_1).$$

C. q. f. d.

Théorème III. *Supposons données n régions normales* (R_1), (R_2), (R_3), ..., (R_n) ; *supposons que* (R_1) *et* (R_2) *ont au moins un point commun, de même que* (R_2) *et* (R_3), (R_3) *et* (R_4), ..., (R_{n-1}) *et* (R_n). *Soient* (UV) *un segment de* (R_1), (U_1V_1) *un segment de* $(R_1)(R_2)$, (U_2V_2) *un segment de* $(R_2)(R_3)$, ..., $(U_{n-1}V_{n-1})$ *un segment de* $(R_{n-1})(R_n)$ *et* (AB) *un segment de* (R_n). *Soient* U'_1 *un point de* (U_1V_1) *distinct de* U_1, U'_2 *un point de* (U_2V_2) *distinct de* U_2, ..., U'_{n-1} *un point de* $(U_{n-1}V_{n-1})$ *distinct de* U_{n-1}. *Supposons enfin que* $(U_1U'_1) \equiv (U_2U'_2)$ *dans* R_2,

$(U_2U'_2) \equiv (U_3U'_3)$ *dans* (R_3), ..., $(U_{n-2}U'_{n-2}) \equiv (U_{n-1}U'_{n-1})$ *dans* (R_{n-1}). *Convenons de désigner par* $\frac{XY}{X_1Y_1}$ *la mesure de* (XY) *avec* (X_1Y_1) *comme unité,* (XY) *et* (X_1Y_1) *étant deux segments appartenant à une même région normale. On a*

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{AB}{U_{n-1}V_{n-1}} \cdot \frac{U_{n-1}V_{n-1}}{U_{n-2}V_{n-2}} \cdots \frac{U_4V_4}{U_3V_3} \cdot \frac{U_3V_3}{U_2V_2} \cdot \frac{U_2V_2}{U_1V_1} \cdot \frac{U_1V_1}{UV} \\ &\qquad = \frac{AB}{U_{n-1}U'_{n-1}} \cdot \frac{U_1U'_1}{UV}. \end{aligned} \right.$$

Démonstration. Nous avons

$$\frac{U_1V_1}{UV} = \frac{U_1V_1}{U_1U'_1} \frac{U_1U'_1}{UV} \text{ dans } (R_1),$$

$$\frac{U_1V_1}{U_1U'_1} \text{ dans } (R_1) = \frac{U_1V_1}{U_1U'_1} \text{ dans } (R_2),$$

$$\frac{U_2V_2}{U_1V_1} \cdot \frac{U_1V_1}{U_1U'_1} = \frac{U_2V_2}{U_1U'_1} \text{ dans } (R_2).$$

Le premier membre de (1) vaut donc

$$(2)\quad \left(\frac{AB}{U_{n-1}V_{n-1}} \cdot \frac{U_{n-1}V_{n-1}}{U_{n-2}V_{n-2}} \cdots \frac{U_4V_4}{U_3V_3} \cdot \frac{U_3V_3}{U_2V_2} \cdot \frac{U_2V_2}{U_1U'_1}\right) \frac{U_1U'_1}{UV}.$$

On a

$$\frac{U_3V_3}{U_2V_2} \frac{U_2V_2}{U_1U'_1} = \frac{U_3V_3}{U_2V_2} \frac{U_2V_2}{U_2U'_2} = \frac{U_3V_3}{U_2U'_2},$$

et (2) vaut

$$(3)\quad \left(\frac{AB}{U_{n-1}V_{n-1}} \cdot \frac{U_{n-1}V_{n-1}}{U_{n-2}V_{n-2}} \cdots \frac{U_4V_4}{U_3V_3} \cdot \frac{U_3V_3}{U_2U'_2}\right) \frac{U_1U'_1}{UV}.$$

En répétant $n-4$ fois l'opération que nous avons faite pour passer de (2) à (3) on trouve que (3) vaut

$$\frac{AB}{U_{n-1}V_{n-1}} \cdot \frac{U_{n-1}V_{n-1}}{U_{n-2}U'_{n-2}} \cdot \frac{U_1U'_1}{UV}$$

ou

$$\frac{AB}{U_{n-1}V_{n-1}} \cdot \frac{U_{n-1}V_{n-1}}{U_{n-1}U'_{n-1}} \cdot \frac{U_1U'_1}{UV} \text{ ou encore } \frac{AB}{U_{n-1}U'_{n-1}} \cdot \frac{U_1U'_1}{UV}.$$

Le théorème est donc établi.

Théorème IV. *Supposons donnés deux couples de points distincts* A *et* B, U *et* V ; *nous supposons qu'il existe une région normale au moins contenant* A *et* B *et une région normale au moins contenant* U *et* V. *Soit* (R_1), (R_2), ..., (R_n) *une suite de régions normales en nombre fini jouissant des propriétés suivantes :* U *et* V *sont situés dans* (R_1); (R_1) *et* (R_2) *ont au moins un point commun, de même que* (R_2) *et* (R_3), (R_3) *et* (R_4), ..., (R_{n-1}) *et* (R_n); A *et* B *sont situés dans* (R_n). *Soient* (U_1V_1) *un segment de* $(R_1)(R_2)$, (U_2V_2) *un segment de* $(R_2)(R_3)$, ..., $(U_{n-1}V_{n-1})$ *un segment de* $(R_{n-1})(R_n)$. *Le nombre*

$$\frac{AB}{U_{n-1}V_{n-1}} \cdot \frac{U_{n-1}V_{n-1}}{U_{n-2}V_{n-2}} \cdots \frac{U_4V_4}{U_3V_3} \cdot \frac{U_3V_3}{U_2V_2} \cdot \frac{U_2V_2}{U_1V_1} \cdot \frac{U_1V_1}{UV}$$

a la même valeur pour toutes les suites de régions normales et de segments analogues à (R_1), (R_2), ..., (R_n) *et* (U_1V_1), (U_2V_2), ..., $(U_{n-1}V_{n-1})$.

Démonstration. Soient (R'_1), (R'_2), ..., (R'_m) et $(U'_1V'_1)$, $(U'_2V'_2)$, ..., $(U'_{m-1}V'_{m-1})$ deux nouvelles suites de régions normales et de segments analogues aux deux premières.

Nous pouvons trouver un point W entre U et V tel que dans (R_1) on a $UW < U_1V_1$. Alors il y a un point W_1 entre U_1 et V_1 tel que $(UW) \equiv (U_1W_1)$. Lorsque nous déplaçons l'un des points W ou W_1 de manière à diminuer UW ou U_1W_1, nous pouvons toujours déplacer l'autre de façon à ce que (U_1W_1) et (UW) restent toujours congruents entre eux. Prenons maintenant W_1 assez près de U_1 pour qu'entre U_2 et V_2 il y ait un point W_2 tel que l'on ait dans (R_2) $(U_1W_1) \equiv (U_2W_2)$, et ayons soin de déplacer W, s'il y a lieu, de façon que la congruence $(UW) \equiv (U_1W_1)$ soit conservée. En continuant ainsi nous pourrons trouver une suite de points W, W_1, W_2, ..., W_{n-1}, W'_1, W'_2, ..., W'_{m-1}, C situés respectivement entre U et V, entre U_1 et V_1, entre U_2 et V_2, ..., entre U_{n-1} et V_{n-1}, entre U'_1 et V'_1, entre U'_2 et V'_2, ..., entre U'_{m-1} et V'_{m-1}, entre A et B tels que l'on a

$$(UW) \equiv (U_1W_1) \text{ dans } (R_1),\ (U_1W_1) \equiv (U_2W_2) \text{ dans } (R_2), \ldots,$$
$$(U_{n-2}W_{n-2}) \equiv (U_{n-1}W_{n-1}) \text{ dans } (R_{n-1}),$$

$$(UW) \equiv (U'_1W'_1) \text{ dans } (R'_1), (U'_1W'_1) \equiv (U'_2W'_2) \text{ dans } (R'_2), \ldots,$$
$$(U'_{m-2}W'_{m-2}) \equiv (U'_{m-1}W'_{m-1}) \text{ dans } (R'_{m-1}),$$
$$(U'_{m-1}W'_{m-1}) \equiv (AC) \text{ dans } (R'_m).$$

Alors on a (théorème (II)

$$(1) \qquad (U_{n-1}W_{n-1}) \equiv (AC) \text{ dans } (R_n).$$

On a ensuite

$$(2) \quad \frac{AB}{U_{n-1}V_{n-1}} \cdot \frac{U_{n-1}V_{n-1}}{U_{n-2}V_{n-2}} \cdots \frac{U_1V_1}{UV} = \frac{AB}{U_{n-1}W_{n-1}} \cdot \frac{UW}{UV} \text{ (théorème III)},$$

$$(3) \quad \frac{AB}{U'_{m-1}V'_{m-1}} \cdot \frac{U'_{m-1}V'_{m-1}}{U'_{m-2}V'_{m-2}} \cdots \frac{U'_1V'_1}{UV} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{UW}{UV} \text{ (théorème III)}.$$

D'après (1) les seconds membres de (2) et (3) sont égaux et ainsi le theorème est établi.

Définition. Supposons donnés deux points distincts A et B tels qu'il existe une région normale contenant ces deux points. Il y a peut-être plusieurs régions normales contenant ces deux points ; nous savons que s'il en est ainsi le segment (AB) est constitué par le même ensemble de points quelque soit la région normale dans laquelle on se place. Nous pouvons ainsi considérer le segment déterminé par deux points distincts indépendamment de toute région normale, moyennant l'hypothèse qu'il existe au moins une région normale qui contient les deux points. Lorsque nous parlons à l'avenir du segment déterminé par deux points sans nous rapporter à une région normale, nous admettrons implicitement cette hypothèse.

Supposons donnés deux segments (UV) et AB) ; soient (R_1) une région normale contenant (UV) et (R_n) une région normale contenant (AB). D'après le postulat IV nous pouvons toujours relier entre elles les régions (R_1) et (R_n) par une suite de régions normales en nombre fini (R_2), ..., (R_{n-1}) telle que la suite considérée dans le théorème IV. Nous pouvons aussi trouver une suite de segments (U_1V_1), (U_2V_2), ..., $(U_{n-1}V_{n-1})$ telle que la suite considérée dans le

même théorème. Nous pouvons finalement considérer le nombre $\frac{AB}{U_{n-1}V_{n-1}} \cdots \frac{U_1V_1}{UV}$. D'après le théorème IV, ce nombre est indépendant des régions normales (R_1), .., (R_n) et des segments (U_1V_1), ..., $(U_{n-1}V_{n-1})$ considérés ; il ne dépend que des segments (AB) et (UV). Par définition nous dirons que ce nombre est la *mesure* du segment (AB) avec le segment (UV) comme unité.

S'il existe une région normale (R) contenant à la fois (AB) et (UV), la mesure de (AB) avec (UV) comme unité telle que nous venons de la définir est égale à la mesure de (AB) avec (UV) comme unité dans la région (R) telle que nous l'avons définie au chapitre IV. Cela résulte du théorème IV.

Théorème V. *Si* (AB), (CD) *et* (EF) *sont trois segments quelconques, la mesure de* (AB) *avec* (EF) *comme unité est égale à la mesure de* (AB) *avec* (CD) *comme unité multipliée par la mesure de* (CD) *avec* (EF) *comme unité.*

Démonstration. Soient (R_1) une région normale contenant EF, (R_2) une région normale contenant (CD) et (R_3) une région normale contenant (AB). Passons de (R_1) à (R_2) par une suite de régions normales (R'_1), (R''_1), ..., $[R_1^{(n)}]$ empiétant l'une sur l'autre et de (R_2) à (R_3) par une deuxième suite de régions normales (R'_2), (R''_2), ..., $[R_2^{(m)}]$ empiétant l'une sur l'autre. On peut passer de (R_1) à (R_3) par la suite de régions normales (R_1), (R'_1), (R''_1), ..., $[R_1^{(n)}]$, (R_2), (R_2), (R'_2), (R''_2), ..., $[R_2^{(m)}]$, (R_3). Le segment (CD) est dans la région commune aux deux régions normales consécutives (R_2) et (R_2). On peut donc prendre (CD) comme l'un des segments servant à passer de (EF) à (AB) et de là résulte immédiatement le théorème à établir.

Convention. Choisissons un segment quelconque mais bien déterminé et fixe. Appelons ce segment *l'unité de longueur*. D'après ce que nous venons de voir, chaque segment a une mesure bien déterminée avec l'unité de longueur comme unité, aussi bien lorsqu'il est possible de trouver une région normale contenant à la fois le segment

considéré et l'unité de longueur que lorsque cela n'est pas possible. Lorsque dans la suite nous parlerons de la mesure d'un segment (AB) sans spécifier quel segment est pris comme unité, nous entendrons par là la mesure du segment en question avec l'unité de longueur comme unité, et nous indiquerons cette mesure par AB.

Considérons une région normale quelconque (R). En général (R) ne contiendra pas l'unité de longueur et les mesures des segments de (R) ne seront plus prises avec un segment fixe de (R) comme unité, comme cela devrait être le cas si nous appliquions la convention du § 139. Toutefois il est fort aisé de voir comment on peut étendre les différents théorèmes sur la mesure des segments du chapitre IV aux mesures des segments de (R), le mot mesure étant pris dans le sens plus général que nous venons d'y attacher. Considérons en effet dans (R) un segment fixe (UV). La mesure d'un segment quelconque de (R) est égale à la mesure de ce segment avec (UV) comme unité multipliée par la mesure de (UV) avec l'unité de longueur comme unité (théorème V). Si maintenant nous faisons jouer à (UV) dans (R) le rôle de l'unité de longueur du § 139, la mesure d'un segment de (R) prise conformément à la convention du § 139 diffère de la mesure de ce segment prise conformément à la nouvelle convention que nous venons de faire par un facteur constant. Cela étant, l'extension des théorèmes sur la mesure des segments du chapitre IV aux mesures des segments de (R), le mot mesure étant pris dans le nouveau sens, n'offre pas de difficulté et nous ne nous y arrêterons pas d'avantage. Remarquons seulement comme exemple que la mesure d'un segment de (R) est supérieure, égale, ou inférieure à celle d'un autre segment de (R) suivant que le premier segment est supérieur, congruent, ou inférieur au second, et réciproquement; remarquons de plus que le théorème du § 142 reste valable sans restrictions.

Soit x la mesure d'un segment quelconque (AB) de (R) avec un segment fixe de (R) comme unité et soit y la me-

sure du même segment (AB) avec l'unité de longueur comme unité. De ce que y diffère de x par un facteur constant, il résulte qu'il existe un nombre positif k et un seul tel que l'on a

$$\cos\frac{y}{k} = \varphi(x)$$

pour toutes les valeurs de x pour lesquelles la fonction $\varphi(x)$ du § 336 est définie et que $\frac{y}{k}$ est inférieur à $\frac{\pi}{2}$ si $\varphi(x)$ est défini pour la valeur considérée de x. Appelons la constante k le *paramètre* de la région normale (R).

Théorème VI. *Les paramètres de toutes les régions normales sont égaux entre eux.*

Démonstration. Soient (R_1) et (R_2) deux régions normales ayant au moins un point commun; soient k_1 le paramètre de (R_1) et k_2 celui de (R_2). Considérons dans (R_1) (R_2) un quadrilatère birectangle isoscèle ABB'A', les angles droits étant en A et en B. On a

$$\lim_{AB \gtrless 0} \frac{A'B'}{AB} = \cos\frac{AA'}{k_1} = \cos\frac{AA'}{k_2}.$$

Comme $\frac{AA'}{k_1}$ et $\frac{AA'}{k_2}$ sont inférieurs à $\frac{\pi}{2}$, on a $k_1 = k_2$. D'autre part on peut passer d'une région normale quelconque à une autre région normale quelconque par une chaîne de régions normales empiétant l'une sur l'autre. De là résulte immédiatement le théorème à démontrer.

Notation. Nous désignerons désormais par k la valeur commune des paramètres des différentes régions normales.

Lorsqu'une région normale (R) contient l'unité de longueur, le rôle de k dans (R) est exactement pareil au rôle du paramètre k dans l'espace de la géométrie générale; mais lorsque (R) ne contient pas l'unité de longueur, on ne peut plus affirmer a priori qu'il en est encore ainsi. Toutefois il est très facile d'étendre les différents théorèmes de la géométrie générale où il s'agit du paramètre k à la constante que nous désignons actuellement par k

et nous ne nous arrêterons pas à cette extension. Remarquons seulement comme exemple que les différentes formules trigonométriques de la géométrie générale sont valables dans une région normale lorsqu'on remplace le paramètre de la géométrie générale par la constante désignée actuellement par k et les mesures des côtés des triangles par les mesures de ces côtés prises conformément à la nouvelle convention.

Postulat XI. *Supposons donnés une région normale* (R), *un point* A *de* (R), *une semi-droite* a *de* (R) *issue de* A *et un nombre positif* m. *Il existe un point* B *et un seul jouissant de la propriété suivante. Il est possible de trouver un nombre fini de régions normales* (R_1), (R_2), . ., (R_n) *et un nombre fini de points* A_1, A_2, ..., A_n *remplissant les conditions que voici :* A, A_1 *et* A_2 *sont distincts, appartiennent à* (R_1) *et y sont en ligne droite,* A_1 *étant entre* A *et* A_2; A_1, A_2 *et* A_3 *sont distincts, appartiennent à* (R_2) *et y sont en ligne droite,* A_2 *étant entre* A_1 *et* A_3; ...; A_{n-1}, A_n *et* B *sont distincts, appartiennent à* (R_n) *et y sont en ligne droite,* A_n *étant entre* A_{n-1} *et* B; *les semi-droites déterminées dans* (R) (R_1) *par les semi-droites* a *de* (R) *et* $|AA_2$ *de* (R_1) *coïncident; enfin on a*

$$AA_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n + A_nB = m.$$

Remarque. Le postulat XI joue ici le même rôle que le postulat III 1 du § 3 dans la géométrie hyperbolique et dans la géométrie euclidienne. C'est pour pouvoir introduire ce postulat III 1 du § 3 que nous avons supposé l'espace formé de régions normales dont chacune satisfait aux postulats du § 10, au lieu de supposer que l'espace entier satisfait à ces postulats.

Postulat XII. *Supposons donnés une région normale* (R_0), *une transformation congruente* (T_0) *dans* (R_0) *et un point quelconque de l'espace* P. *Désignons par* (R_1), (R_2), ..., (R_n) *une suite quelconque de régions normales en nombre fini jouissant des propriétés suivantes :* (R_0) *et* (R_1) *ont au moins un point commun, de même que* (R_1) *et* (R_2), (R_2) *et* (R_3), ..., (R_{n-1}) *et* (R_n); P *est situé dans* (R_n);

il existe quatre points A_1, B_1, C_1, D_1 *appartenant à* $(R_0)(R_1)$, *non situés dans un même plan, et qui ont dans* (T_0) *des transformés* A'_1, B'_1, C'_1, D'_1 *appartenant à* $(R_0)(R_1)$; *considérons dans* (R_1) *la transformation congruente* (T_1) *qui porte* A_1 *en* A'_1, B_1 *en* B'_1, C_1 *en* C'_1 *et* D_1 *en* D'_1; *il existe quatre points* A_2, B_2, C_2, D_2 *appartenant à* $(R_1)(R_2)$, *non situés dans un même plan, et qui ont dans* (T_1) *des transformés* A'_2, B'_2, C'_2, D'_2 *appartenant à* $(R_1)(R_2)$; *soit* (T_2) *la transformation congruente de* (R_2) *qui porte* A_2 *en* A'_2, B_2 *en* B'_2, C_2 *en* C'_2 *et* D_2 *en* D'_2; *il existe quatre points* A_3, B_3, C_3, D_3 *appartenant à* $(R_2)(R_3)$, *non situés dans un même plan, et qui ont dans* (T_2) *des transformés appartenant à* $(R_2)(R_3)$; *on peut continuer ainsi jusqu'à ce qu'on atteint la région* (R_n) *et dans la transformation congruente de* (R_n) *qu'on trouve finalement le point* P *a un transformé* P'. *S'il existe une suite au moins de régions normales telle que la suite* $(R_1), (R_2), \dots, (R_n)$, *on trouve le même transformé pour* P *si l'on passe de* (R_0) *à* P *par toute autre suite de régions normales jouissant des mêmes propriétés que la suite* $(R_1), (R_2), \dots, (R_n)$.

Nous avons maintenant terminé l'exposé du système de postulats qui est destiné à remplacer les postulats de la géométrie générale dans l'hypothèse de l'angle obtus. Avant d'aborder l'étude de la géométrie basée sur notre nouveau système de postulats, il importe de montrer que ce système est exempt de contradictions.

401. Théorème. *Les postulats du* § 400 *sont compatibles.*

Démonstration. Pour établir ce théorème nous allons nous placer dans l'espace euclidien à quatre dimensions, de même qu'au chapitre XI.

Désignons les coordonnées d'un point quelconque par x_1, x_2, x_3, x_4; soit r un nombre fixe positif. Appelons *point elliptique* tout point de l'hypersurface

$$(1) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = r^2.$$

Considérons successivement les ensembles de points elliptiques définis par chacune des inégalités suivantes :

$$x_1 > 0;\ x_1 < 0;\ x_2 > 0;\ x_2 < 0;\ x_3 > 0;\ x_3 < 0;$$
$$x_4 > 0;\ x_4 < 0.$$

Nous obtenons ainsi huit ensembles de points elliptiques. Appelons *région normale* chacun de ces huit ensembles.

Au chapitre XI nous avons défini dans la région normale $x_4 > 0$ certains objets que nous avons fait correspondre aux différents concepts fondamentaux de la géométrie générale. Nous pouvons procéder exactement de la même manière pour chacune des sept autres régions normales. Montrons maintenant que l'ensemble de tous les points elliptiques satisfait à tous les postulats du § 400.

On constate immédiatement que les postulats I, II et III du § 400 sont exacts.

Occupons-nous du postulat IV. Supposons donnés deux points elliptiques distincts A et B. D'après le chapitre X nous pouvons toujours trouver dans l'espace à quatre dimensions un plan

(2) $$a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3 + a'_4 x_4 = 0,$$

(3) $$a''_1 x_1 + a''_2 x_2 + a''_3 x_3 + a''_4 x_4 = 0,$$

passant par A, par B et par le point (0, 0, 0, 0). Effectuons une transformation linéaire orthogonale (T) qui laisse l'origine invariante et transforme l'hyperplan (3) dans l'hyperplan

(4) $$x_4 = 0.$$

Soit

(5) $$A'_1 x_1 + A'_2 x_2 + A'_3 x_3 + A'_4 x_4 = 0$$

le transformé de (2); on n'a pas $A'_1 = A'_2 = A'_3 = 0$. Soient

(6) $$B'_1 x_1 + B'_2 x_2 + B'_3 x_3 + B'_4 x_4 = 0,$$

(7) $$B''_1 x_1 + B''_2 x_2 + B''_3 x_3 + B''_4 x_4 = 0,$$

(8) $$B'''_1 x_1 + B'''_2 x_2 + B'''_3 x_3 + B'''_4 x_4 = 0,$$

(9) $$B^{\text{IV}}_1 x_1 + B^{\text{IV}}_2 x_2 + B^{\text{IV}}_3 x_3 + B^{\text{IV}}_4 x_4 = 0$$

les transformés respectifs des hyperplans $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Aux points communs à l'hypersurface (1) et au plan (2) (3) répondent les points communs à (1) et au plan (5) (4); x_4 est nul pour tous ces points. Faisons

correspondre à chacun d'eux le point de l'espace euclidien à trois dimensions dont les trois coordonnées cartésiennes par rapport à des axes rectangulaires $O_1X_1X_2X_3$ sont égales aux valeurs des trois premières coordonnées x_1, x_2, x_3. A l'ensemble des points communs à (1) et à (2) (3) répond alors dans l'espace à trois dimensions le cercle

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2, \tag{10}$$

$$A'_1x_1 + A'_2x_2 + A'_3x_3 = 0. \tag{11}$$

Aux points elliptiques situés dans le plan (2) (3) appartenant à une même région normale répondent dans l'espace à trois dimensions les points de (10) (11) dont les coordonnées introduites dans le premier membre de l'une des équations

$$B'_1x_1 + B'_2x_2 + B'_3x_3 = 0, \tag{12}$$

$$B''_1x_1 + B''_2x_2 + B''_3x_3 = 0, \tag{13}$$

$$B'''_1x_1 + B'''_2x_2 + B'''_3x_3 = 0, \tag{14}$$

$$B^{\text{IV}}_1x_1 + B^{\text{IV}}_2x_2 + B^{\text{IV}}_3x_3 = 0 \tag{15}$$

rendent ce premier membre différent de zéro et lui fournissent un signe constant. De plus, l'ensemble des points elliptiques situés dans le plan (2) (3) appartenant à une même région normale constitue dans cette région normale une droite elliptique.

Supposons maintenant un moment que la matrice de déterminants formée avec les coefficients B des équations (12), (13), (14), (15) puisse être nulle. Le système des équations $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ représente dans l'espace à quatre dimensions une droite; le système des équations (6), (7), (8) représente donc aussi une droite et l'on a

$$\left\| \begin{matrix} B'_1 & B'_2 & B'_3 & B'_4 \\ B''_1 & B''_2 & B''_3 & B''_4 \\ B'''_1 & B'''_2 & B'''_3 & B'''_4 \end{matrix} \right\| \neq 0.$$

Comme le déterminant obtenu en supprimant la dernière colonne de cette matrice est nul d'après l'hypothèse que

nous venons de faire, tous les points de la droite (6) (7) (8) sont situés dans (4). Donc, tous les points de la droite $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ sont situés dans (3) et l'on a $a''_4 = 0$. On trouve de même $a''_1 = a''_2 = a''_3 = 0$, ce qui est impossible. L'hypothèse provisoire que nous avons faite doit être rejetée. Supposons pour fixer les idées

$$(16) \qquad \begin{vmatrix} B'_1 & B'_2 & B'_3 \\ B''_1 & B''_2 & B''_3 \\ B'''_1 & B'''_2 & B'''_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Il résulte de (16) que dans chacune des équations (12), (13), (14) tous les B ne sont pas simultanément nuls. Ces trois équations rapportées aux axes $O_1X_1X_2X_3$ dans l'espace à trois dimensions représentent trois plans. Les points dont les coordonnées fournissent aux premiers membres de ces équations un signe constant sont les points situés d'un même côté des plans représentés par ces équations. Il résulte en outre de (16) que les plans (12), (13), (14) sont distincts deux à deux et ne passent pas par une même droite. Il en résulte que parmi les plans (12), (13) et (14) on peut à coup sûr en trouver deux qui sont distincts de (11) et coupent (11) suivant deux droites distinctes ; supposons par exemple que (12) et (13) jouissent de cette propriété.

(12) coupe le cercle (10) (11) en deux points diamétralement opposés L et L_1 ; (13) coupe (10) (11) en deux points diamétralement opposés M et M_1, qui sont distincts de L et de L_1 ; soient enfin A′ et B′ les points de (10) (11) qui répondent à A et à B ; A′ et B′ sont distincts entre eux, mais chacun des points A′ et B′ pourrait coïncider avec l'un des points L, L_1, M ou M_1. Prenons l'un quelconque des deux diamètres LL_1 ou MM_1 du cercle LL_1MM_1, par exemple LL_1. Considérons l'ensemble des points de LL_1MM_1 distincts de L et L_1 et situés d'un même côté de LL_1. D'après ce qui précède cet ensemble répond à une certaine droite elliptique d'une certaine région normale. Le chapitre XI nous apprend en outre qu'à l'origine des arcs sur cette droite elliptique répond un des deux points

L ou L_1. Appelons maintenant (R'_1) et (R'_2) les deux moitiés en lesquelles le diamètre LL_1 partage le cercle LL_1MM_1, L et L_1 étant exclus ; appelons (R'_3) et (R'_4) les deux moitiés répondant au diamètre MM_1, les points M et M_1 étant exclus. Il est maintenant aisé de voir que l'on peut toujours trouver sur le cercle LL_1MM_1 quatre points distincts A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 jouissant des propriétés suivantes : A', A'_1, A'_2 appartiennent à un même arc (R'), A'_1 étant entre A' et A'_2 sur cet arc (R') ; A'_1, A'_2, A'_3 appartiennent aussi à un même arc (R'), A'_2 étant entre A'_1 et A'_3 ; la même propriété appartient aux points A'_2, A'_3, A'_4 et enfin aux points A'_3, A'_4, B'.

Soient maintenant A_1, A_2, A_3, A_4 les points elliptiques auxquels répondent A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 après la transformation (T) et le passage à l'espace à trois dimensions. D'après le chapitre XI, A, A_1, A_2 appartiennent à une même région normale ; ces trois points y sont situés sur une même droite elliptique et A_1 est entre A et A_2. La même chose peut être affirmée de A_1, A_2, A_3, de A_2, A_3, A_4 et enfin de A_3, A_4, B. Le postulat IV du § 400 se trouve ainsi établi.

On constate ensuite sans la moindre difficulté que les postulats V — IX du § 400 sont exacts.

Passons au postulat X. Considérons deux régions normales ayant au moins un point commun, par exemple les régions $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$. Soit A un point elliptique commun à ces deux régions et soient x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 les coordonnées de A dans l'espace à quatre dimensions ; on a $x'_1 > 0$ et $x'_2 > 0$. Au § 312 nous avons dit ce que nous entendons par longueur d'un segment elliptique. Au § 342 nous avons fait remarquer que la longueur d'un segment elliptique diffère par un facteur constant de sa mesure. Il en résulte que l'on peut trouver un nombre positif α assez petit pour que dans la région $x_1 > 0$ il existe sur chaque semi-droite elliptique issue de A un point P tel que $r \,.\, \sphericalangle POA = \alpha$. Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées de l'un quelconque de ces points P dans l'espace à quatre dimensions. D'après ce que nous avons vu au § 312, la distance rectiligne AP, c. à d. le nombre

$$+\sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + (x'_3 - x_3)^2 + (x'_4 - x_4)^2},$$

aura la même valeur pour tous les points P et lorsque α tend vers zéro, ce nombre tend vers zéro. Il en résulte que lorsque α est assez petit, les x resteront arbitrairement voisins des x' pour tous les P. Si donc α est assez petit, on aura pour tous les P $x_2 > 0$ et tous les P appartiendront à la région $x_2 > 0$. La validité du postulat X est ainsi établie.

En procédant exactement comme au § 400 nous pouvons maintenant définir dans la région commune à deux régions normales ayant au moins un point commun la droite elliptique, le plan elliptique, les relations d'ordre entre les points elliptiques d'une droite elliptique, le segment elliptique, la semi-droite elliptique, l'angle elliptique, le demi-plan elliptique et les relations de congruence entre les segments et entre les angles elliptiques. Les théorèmes I et II du § 400 sont donc valables pour les points elliptiques. Il s'ensuit que les théorèmes III, IV, V et VI ainsi que les définitions et conventions relatives à la mesure des segments du § 400 peuvent être directement transportés dans le domaine des points elliptiques.

Passons maintenant au postulat XI. Supposons donnés une région normale (R), un point elliptique A de (R), une semi-droite elliptique a de (R) issue de A et un nombre positif m. Soient (2) et (3) les équations du plan de l'espace à quatre dimensions qui passe par le point 0, 0, 0, 0 et qui contient la semi-droite elliptique a. Raisonnons sur le plan (2) (3) exactement comme nous l'avons fait pour établir le postulat IV. Aux points elliptiques situés dans le plan (2) (3) répondront les points du cercle LL_1MM_1; LL_1 et MM_1 sont deux diamètres distincts de ce cercle et nous connaissons la signification de ces diamètres. Par la considération du cercle nous trouvons aisément qu'il existe au moins un point B jouissant de la propriété dont il est question dans le postulat XI. Soit maintenant C un autre point elliptique jouissant de la même propriété que B. C sera également situé dans le plan (2) (3). Soient A', B' et C' les points du cercle

LL_1MM_1 qui répondent à A, B et C. Soit q le rapport constant de la longueur d'un segment elliptique à sa mesure (ce rapport est le même dans toutes les régions normales). Si un point mobile part de A′ et parcourt sur le cercle LL_1MM_1 un arc d'une longueur qm en se mouvant toujours dans un même sens convenablement choisi, il arrive en B′ et aussi en C′. B′ et C′ coïncident donc; il en est de même de B et de C et le postulat XI est établi.

Passons enfin au postulat XII. Pour démontrer ce postulat il sera nécessaire d'établir d'abord le lemme suivant.

Lemme. *Supposons donnés dans l'espace euclidien à quatre dimensions quatre points* A (a_1, a_2, a_3, a_4), B (b_1, b_2, b_3, b_4), C (c_1, c_2, c_3, c_4), D (d_1, d_2, d_3, d_4) *tels qu'il n'existe pas d'hyperplan contenant ces quatre points ainsi que l'origine des coordonnées* O. *Supposons donnés ensuite quatre nouveaux points* A′ (a'_1, a'_2, a'_3, a'_4), B′ (b'_1, b'_2, b'_3, b'_4), C′ (c'_1, c'_2, c'_3, c'_4), D′ (d'_1, d'_2, d'_3, d'_4) *tels qu'il n'existe pas d'hyperplan passant par ces quatre points et par* O. *Supposons enfin* OA = OA′, OB = OB′, OC = OC′, OD = OD′, AB = A′B′, AC = A′C′, AD = A′D′, BC = B′C′, BD = B′D′, CD = C′D′. *Alors il existe une transformation linéaire orthogonale et une seule transformant les points* A, B, C, D, O *respectivement dans les points* A′, B′, C′, D′, O.

Démonstration. Il existe un hyperplan et un seul passant par A, B, C et O; soit α cet hyperplan. Soit α' l'hyperplan passant par A′, B′, C′ et O. Soit (T_1) une transformation linéaire orthogonale qui transforme O en O et α dans l'hyperplan $x_4 = 0$; soit (T_2) une transformation linéaire orthogonale qui transforme O en O et α' dans l'hyperplan $x_4 = 0$. Soient A″ $(a''_1, a''_2, a''_3, 0)$, B″ $(b''_1, b''_2, b''_3, 0)$, C″ $(c''_1, c''_2, c''_3, 0)$ et D″ $(d''_1, d''_2, d''_3, d''_4)$ les transformés de A, B, C et D dans (T_1) et soient A‴ $(a'''_1, a'''_2, a'''_3, 0)$, B‴ $(b'''_1, b'''_2, b'''_3, 0)$, C‴ $(c'''_1, c'''_2, c'''_3, 0)$ et D‴ $(d'''_1, d'''_2, d'''_3, d'''_4)$ les transformés de A′, B′, C′, D′ dans (T_2).

Prenons dans l'espace euclidien à trois dimensions un

système d'axes coordonnés rectangulaires fixe $O_1X_1X_2X_3$ et soient A''_1, B''_1, C''_1, A'''_1, B'''_1, C'''_1, O_1 les points dont les coordonnées cartésiennes sont égales aux trois premières coordonnées des points A'', B'', C'', A''', B''', C''', O. Les points A''_1, B''_1, C''_1 d'une part et A'''_1, B'''_1, C'''_1 d'autre part ne sont pas dans un même plan avec O_1. On a d'ailleurs $O_1A''_1 = O_1A'''_1$, $O_1B''_1 = O_1B'''_1$, $O_1C''_1 = O_1C'''_1$, $A''_1B''_1 = A'''_1B'''_1$, $A''_1C''_1 = A'''_1C'''_1$, $B''_1C''_1 = B'''_1C'''_1$. Il existe donc dans l'espace à trois dimensions une transformation linéaire orthogonale et une seule transformant A''_1, B''_1, C''_1, O_1 respectivement en A'''_1, B'''_1, C'''_1, O_1. Soient

$$(17)\quad \begin{cases} x'''_1 = l'_1x''_1 + l'_2x''_2 + l'_3x''_3, \\ x'''_2 = l''_1x''_1 + l''_2x''_2 + l''_3x''_3, \\ x'''_3 = l'''_1x''_1 + l'''_2x''_2 + l'''_3x''_3 \end{cases}$$

les formules de transformation.

Soit E''_1 le point de l'espace à trois dimensions dont les coordonnées par rapport aux axes $O_1X_1X_2X_3$ sont d''_1, d''_2, d''_3; soit E'''_1 (e'''_1, e'''_2, e'''_3) le transformé de (E''_1) dans (17). En exprimant les égalités

$$A''_1E''_1 = A'''_1E'''_1,\ B''_1E''_1 = B'''_1E'''_1,\ C''_1E''_1 = C'''_1E'''_1$$

au moyen des coordonnées des différents points on trouve aisément

$$(18)\quad \begin{cases} a''_1d''_1 + a''_2d''_2 + a''_3d''_3 = a'''_1e'''_1 + a'''_2e'''_2 + a'''_3e'''_3, \\ b''_1d''_1 + b''_2d''_2 + b''_3d''_3 = b'''_1e'''_1 + b'''_2e'''_2 + b'''_3e'''_3, \\ c''_1d''_1 + c''_2d''_2 + c''_3d''_3 = c'''_1e'''_1 + c'''_2e'''_2 + c'''_3e'''_3. \end{cases}$$

On a d'ailleurs

$$(19)\quad \begin{vmatrix} a'''_1 & a'''_2 & a'''_3 \\ b'''_1 & b'''_2 & b'''_3 \\ c'''_1 & c'''_2 & c'''_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Exprimons maintenant que dans l'espace à quatre dimensions on a

$$(20)\quad A''D'' = A'''D''',\ B''D'' = B'''D''',\ C''D'' = C'''D'''.$$

En tenant compte de ce que nous savons sur les égalités

entre les distances mutuelles des points A'', B'', C'', D'', O et A''', B''', C''', D''', O, nous trouverons en partant de (20) des égalités ne différant de (18) qu'en ce que chaque e''' est remplacé par le d''' de même indice. D'après (19) nous avons donc

$$e'''_1 = d'''_1, \quad e'''_2 = d'''_2, \quad e'''_3 = d'''_3.$$

Nous avons d'ailleurs

$$d''^2_1 + d''^2_2 + d''^2_3 + d''^2_4 = d'''^2_1 + d'''^2_2 + d'''^2_3 + d'''^2_4,$$
$$d''^2_1 + d''^2_2 + d''^2_3 = e'''^2_1 + e'''^2_2 + e'''^2_3.$$

Donc

$$(21) \qquad d'''_4 = \pm d''_4.$$

Considérons maintenant dans l'espace à quatre dimensions la transformation linéaire

$$(22) \quad \begin{cases} x'''_1 = l'_1 x''_1 + l'_2 x''_2 + l'_3 x''_3, \\ x'''_2 = l''_1 x''_1 + l''_2 x''_2 + l''_3 x''_3, \\ x'''_3 = l'''_1 x''_1 + l'''_2 x''_2 + l'''_3 x''_3, \\ x'''_4 = (\pm 1) x''_4, \end{cases}$$

le coefficient de x''_4 dans la dernière formule étant + 1 ou — 1 suivant que dans (21) d''_4 est précédé du signe + ou du signe —. De ce que (17) est une transformation linéaire orthogonale on déduit immédiatement que (22) en est aussi une. (22) transforme de plus A'', B'', C'', D'' et O respectivement en A''', B''', C''', D''' et O.

Effectuons maintenant dans l'espace à quatre dimensions successivement les transformations suivantes : d'abord la transformation (T_1); ensuite la transformation (22); enfin la transformation inverse de la transformation (T_2). La transformation résultant de ces trois transformations successives est une transformation linéaire orthogonale et elle satisfait à la question.

D'autre part on voit aisément qu'il n'y a qu'une seule transformation linéaire qui transforme A, B, C, D, O respectivement en A', B', C', D', O. De là il résulte que la transformation linéaire orthogonale que nous avons trouvée est la seule qui satisfasse à la question.

C. q. f. d.

Revenons maintenant à notre postulat XII. Employons les mêmes notations que dans l'énoncé de ce postulat en nous rappelant toutefois qu'actuellement nous avons à faire à certains objets qui existent dans l'espace euclidien à quatre dimensions.

Nous pouvons trouver dans (R_0) quatre points elliptiques A, B, C, D non situés dans un même plan elliptique qui ont des transformés A', B', C', D' dans la transformation congruente (T_0). A, B, C, D et O ne sont pas situés dans un même hyperplan; il en est de même de A', B', C', D' et O. Les distances mutuelles des points O, A, B, C, D sont d'ailleurs égales chacune à chacune aux distances mutuelles des points O, A', B', C', D', les distances étant prises conformément à la définition de ce concept dans la géométrie à n dimensions. D'après le lemme que nous venons d'établir il existe une transformation linéaire orthogonale (T) et une seule qui transforme A, B, C, D, O respectivement en A', B', C', D', O. Employons les notations suivantes pour désigner les coordonnées dans l'espace à quatre dimensions des points A, B, C, D, A', B', C', D', A_1 et A'_1: A (a_1, a_2, a_3, a_4), B (b_1, b_2, b_3, b_4), C (c_1, c_2, c_3, c_4), D (d_1, d_2, d_3, d_4), A' (a'_1, a'_2, a'_3, a'_4), B' (b'_1, b'_2, b'_3, b'_4), C' (c'_1, c'_2, c'_3, c'_4), D' (d'_1, d'_2, d'_3, d'_4), $A_1 (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $A'_1 (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$. Soit $A''_1 (\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4)$ le transformé de A_1 dans (T). Nous avons dans l'espace à quatre dimensions

$$AA_1 = A'A'_1,\quad BA_1 = B'A'_1,\quad CA_1 = C'A'_1,\quad DA_1 = D'A'_1,$$
$$AA_1 = A'A''_1,\quad BA_1 = B'A''_1,\quad CA_1 = C'A''_1,\quad DA_1 = D'A''_1.$$

En exprimant ces égalités au moyen des coordonnées des points qui y figurent et en tenant compte du fait que tous ces points sont à la même distance de O, on trouve que

$$\begin{aligned}
a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + a_4\alpha_4 &= a'_1x'_1 + a'_2x'_2 + a'_3x'_3 + a'_4x'_4,\\
b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3 + b_4\alpha_4 &= b'_1x'_1 + b'_2x'_2 + b'_3x'_3 + b'_4x'_4,\\
c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4 &= c'_1x'_1 + c'_2x'_2 + c'_3x'_3 + c'_4x'_4,\\
d_1\alpha_1 + d_2\alpha_2 + d_3\alpha_3 + d_4\alpha_4 &= d'_1x'_1 + d'_2x'_2 + d'_3x'_3 + d'_4x'_4,
\end{aligned}$$

et que ces égalités ont encore lieu lorsqu'on remplace

x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 par α'_1, α'_2, α'_3, α'_4. Le déterminant des coefficients des x' ou des α' étant différent de zéro, les x' sont égaux aux α' et A'_1 coïncide avec A''_1. De même on voit que B'_1, C'_1, D'_1 sont les transformés de B_1, C_1, D_1 dans (T). En continuant à raisonner ainsi, on trouve que tout transformé P′ de P obtenu par la méthode indiquée dans l'énoncé du postulat est le transformé de P dans (T). Par là le postulat XII est établi.

Nous avons passé en revue tous les postulats du § 400 et nous pouvons conclure des résultats obtenus que ces postulats sont compatibles. C. q. f. d.

402. Définition. La géométrie basée sur les postulats du § 400 est appelée *géométrie elliptique*. Cette géométrie est identique à celle qui a été découverte par Riemann (voir § 8). La branche de la géométrie générale basée sur l'hypothèse de l'angle obtus nous a donc conduits à la seconde géométrie non-euclidienne, moyennant certaines modifications dans la portée des postulats. Le résultat annoncé au § 11 est ainsi acquis pour la seconde géométrie non-euclidienne également.

Maintenant nous allons étudier quelques-unes des particularités les plus remarquables de l'espace elliptique.

403. Notation. Supposons donnés une région normale (R), un point A de (R), une semi-droite a de (R) issue de A et un nombre positif m. Dans le postulat XI nous avons considéré une certaine loi qui d'après ce postulat fait correspondre un point B parfaitement déterminé aux éléments donnés que nous venons d'énumérer. Nous désignerons pour éviter des longueurs inutiles ce point B par le symbole

$$P\,[(R), A, a, m].$$

404. Théorème. *Soient* (R) *une région normale,* A *un point de* (R), *a une semi-droite de* (R) *issue de* A, *m un nombre positif et* (R′) *une deuxième région normale contenant le point* A. *Désignons par a′ la semi-droite de* (R′) *issue de* A *telle que les semi-droites déterminées par a et par a′ dans* (R) (R′) *soient identiques. Les points* $P\,[(R), A, a, m]$ *et* $P\,[(R'), A, a', m]$ *sont identiques.*

Démonstration. Considérons les régions (R_1), (R_2), ..., (R_n) et les points A_1, A_2, ..., A_n qui sont relatifs au point P [(R), A, *a*, *m*] et dont il s'agit dans le postulat XI. Nous pouvons trouver un point A′ qui est situé dans la région (R_1) sur la droite AA_2 entre A et A_2 et qui appartient à la fois à la région (R) et à la région (R′).

La semi-droite déterminée dans (R′) (R_1) par la semi-droite $|AA_2$ de (R_1) est $|AA'$. La semi-droite déterminée dans (R) (R_1) par la semi-droite $|AA_2$ de (R_1) est $|AA'$; $|AA'$ est donc identique à la semi-droite déterminée dans (R) (R_1) par la semi-droite *a* de (R) et A′ se trouve sur la semi-droite *a* de (R). La semi-droite déterminée dans (R) (R′) par la semi-droite *a* de (R) est donc $|AA'$; $|AA'$ est identique à la semi-droite déterminée dans (R) (R′) par la semi-droite *a′* de R′ et A′ se trouve sur *a′*. La semi-droite déterminée dans (R′)(R_1) par la semi-droite *a′* dé (R′) est donc $|AA'$. Elle est identique à la semi-droite déterminée dans (R′) (R_1) par la semi-droite $|AA_2$ de (R_1).

Le point P [(R), A, *a*, *m*] jouit donc de la propriété qui caractérise P [(R′), A, *a*, *m*] et le théorème est établi.

405. Théorème. *Soient* (R) *une région normale,* A *un point de* (R), *a une semi-droite de* (R) *issue de* A *et m et m′ deux nombres positifs. Soient* (R_1), (R_2), (R_3), ..., (R_n) *une suite de régions normales et* A_1, A_2, ..., A_n, B *une suite de points jouissant des propriétés suivantes :* A *appartient à* (R_1) *et* B *à* (R_n); (R_1) *et* (R_2), (R_2) *et* (R_3), ..., (R_{n-1}) *et* (R_n) *ont au moins un point commun ;* A, A_1 *et* A_2 *sont distincts, appartiennent à* (R_1) *et y sont en ligne droite,* A_1 *étant entre* A *et* A_2; ...; A_{n-1}, A_n *et* B *sont distincts, appartiennent à* (R_n) *et y sont en ligne droite,* A_n *étant entre* A_{n-1} *et* B; *les semi-droites déterminées dans* (R) (R_1) *par a et par la semi-droite* $|AA_1$ *de* (R_1) *sont identiques; on a* $AA_1 + A_1A_2 + \cdots + A_nB = m$. *Soit enfin b la semi-droite de* (R_n) *opposée à* $|BA_n$. *Alors le point* A *est identique au point* P [(R_n), B, $|BA_n$, *m*] *et le point* P [(R), A, *a*, $m + m'$] *est identique au point* P [(R_n), B, *b*, *m′*].

406. Définition. Supposons donnés une région normale (R) et dans (R) un système d'axes coordonnés

rectangulaires OXYZ. Nous dirons que quatre nombres réels x_0, x_1, x_2, x_3 sont des *coordonnées homogènes* d'un point P de l'espace par rapport aux axes OXYZ lorsqu'il est possible de trouver une suite de régions normales (R_1), (R_2), ..., (R_n) et une suite de systèmes d'axes coordonnés $O_1X_1Y_1Z_1$, $O_2X_2Y_2Z_2$, ..., $O_{n-1}X_{n-1}Y_{n-1}Z_{n-1}$ jouissant des propriétés suivantes: O appartient à (R_1); (R_1) et (R_2) ont au moins un point commun et les axes $O_1X_1Y_1Z_1$ sont situés dans $(R_1)(R_2)$; (R_2) et (R_3) ont au moins un point commun et les axes $O_2X_2Y_2Z_2$ sont situés dans (R_2) (R_3); ...; (R_{n-1}) et (R_n) ont au moins un point commun et les axes $O_{n-1}X_{n-1}Y_{n-1}Z_{n-1}$ sont situés dans (R_{n-1}) (R_n); P appartient à (R_n); soient $x_0^{(n-1)}$, $x_1^{(n-1)}$, $x_2^{(n-1)}$, $x_3^{(n-1)}$ les coordonnées homogènes de P dans (R_n) par rapport aux axes $O_{n-1}X_{n-1}Y_{n-1}Z_{n-1}$. Considérons dans (R_{n-1}) les formules qui expriment les coordonnées homogènes d'un point quelconque par rapport aux axes $O_{n-2}X_{n-2}Y_{n-2}Z_{n-2}$ en fonction des coordonnées homogènes du même point par rapport aux axes $O_{n-1}X_{n-1}Y_{n-1}Z_{n-1}$ (§ 388). Donnons dans ces formules aux variables indépendantes les valeurs $x_0^{(n-1)}$, $x_1^{(n-1)}$, $x_2^{(n-1)}$, $x_3^{(n-1)}$ et soient $x_0^{(n-2)}$, $x_1^{(n-2)}$, $x_2^{(n-2)}$, $x_3^{(n-2)}$ les nombres fournis par les formules. Considérons dans (R_{n-2}) les formules qui expriment les coordonnées homogènes d'un point quelconque par rapport aux axes $O_{n-3}X_{n-3}Y_{n-3}Z_{n-3}$ en fonction des coordonnées homogènes du même point par rapport aux axes $O_{n-2}X_{n-2}Y_{n-2}Z_{n-2}$. Donnons dans ces formules aux variables indépendantes les valeurs $x_0^{(n-2)}$, $x_1^{(n-2)}$, $x_2^{(n-2)}$, $x_3^{(n-2)}$ et soient $x_0^{(n-3)}$, $x_1^{(n-3)}$, $x_2^{(n-3)}$, $x_3^{(n-3)}$ les nombres obtenus. En continuant ainsi nous trouvons finalement en nous plaçant dans (R_2) des nombres x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 relatifs aux axes $O_1X_1Y_1Z_1$. Soient $|OX_0$, $|OY_0$, $|OZ_0$ les semi-droites déterminées dans (R) (R_1) par $|OX$, $|OY$, $|OZ$. Considérons dans (R_1) les formules qui expriment les coordonnées homogènes d'un point quelconque par rapport aux axes $OX_0Y_0Z_0$ en fonction des coordonnées homogènes du même point par rapport aux axes $O_1X_1Y_1Z_1$; remplaçons-y les variables indépendantes par x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 et soient ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3 les nombres obtenus.

Il existe un nombre réel non nul q tel que l'on a $qx_0 = \xi_0$, $qx_1 = \xi_1$, $qx_2 = \xi_2$, $qx_3 = \xi_3$.

Comme il est peut-être possible de passer de OXYZ à P par des chaînes de régions normales et de systèmes d'axes coordonnés différentes, nous ne pouvons pas trancher à première vue la question de savoir si deux points distincts peuvent avoir mêmes coordonnées ou si un même point peut avoir des coordonnées différentes (c. à d. non proportionnelles). Nous allons résoudre cette question dans la suite.

Si le point P appartient à (R), les coordonnées de P par rapport aux axes OXYZ déterminées directement dans (R), comme au chapitre XV, sont aussi des coordonnées de P par rapport aux axes OXYZ d'après la définition générale des coordonnées que nous venons de donner. Mais à côté de ces coordonnées déterminées directement dans (R) P en a peut-être d'autres, puisqu'on peut passer de P à OXYZ en parcourant une chaîne de régions normales empiétant l'une sur l'autre qui sort de (R).

Soit (R') une région normale contenant O et distincte de (R). Soient |OX', |OY', |OZ' les semi-droites déterminées dans (R') par |OX, |OY, |OZ. *Si x_0, x_1, x_2, x_3 sont des coordonnées homogènes de* P *par rapport aux axes* OXYZ, *ces nombres sont aussi des coordonnées homogènes de* P *par rapport aux axes* OX'Y'Z', *quelque soit* P.

Théorème. *Si quatre nombres x_0, x_1, x_2, x_3 sont des coordonnées homogènes d'un point, ces quatre nombres ne sont pas simultanément nuls.*

407. Théorème. *Supposons donnés une région normale* (R) *et dans* (R) *un système d'axes coordonnés rectangulaires* OXYZ. *Supposons donnés ensuite quatre nombres quelconques ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3 réels et non tous nuls. Il existe au moins un point tel que ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3 soient ses coordonnées homogènes par rapport aux axes* OXYZ.

Démonstration. Soit A un point quelconque fixe de (R) et soient a_0, a_1, a_2, a_3 les coordonnées homogènes de A dans (R) par rapport aux axes OXYZ. Convenons de laisser les a fixes.

Si les a sont proportionnels aux ξ, le théorème est établi.

Supposons les a non proportionnels aux ξ. D'après le § 383 on peut trouver un nombre positif μ_0 assez petit pour qu'il existe dans (R) un point B ayant comme coordonnées homogènes par rapport aux axes OXYZ les quantités

$$a_0 + \mu_0\xi_0, \quad a_1 + \mu_0\xi_1, \quad a_2 + \mu_0\xi_2, \quad a_3 + \mu_0\xi_3$$

et pour que sur le segment (AB) n'existe aucun point dont les coordonnées par rapport aux axes OXYZ déterminées directement dans (R) soient proportionnelles aux ξ. Si nous posons $\lambda_0 = \frac{1}{\mu_0}$, nous pouvons prendre comme coordonnées homogènes de B les quantités

$$(1) \qquad \lambda_0 a_0 + \xi_0, \quad \lambda_0 a_1 + \xi_1, \quad \lambda_0 a_2 + \xi_2, \quad \lambda_0 a_3 + \xi_3.$$

Laissons λ_0 fixe. Comme les ξ ne sont pas proportionnels aux a, les quantités (1) ne sont pas proportionnelles aux a et B est distinct de A.

Considérons dans (R) la semi-droite |AB et soit Q un point quelconque de cette semi-droite distinct de A. D'après le § 395 les coordonnées de Q dans (R) par rapport aux axes OXYZ sont de la forme

$$pa_0 + q(\lambda_0 a_0 + \xi_0), \quad pa_1 + q(\lambda_0 a_1 + \xi_1), \quad pa_2 + q(\lambda_0 a_2 + \xi_2),$$
$$pa_3 + q(\lambda_0 a_3 + \xi_3).$$

q est différent de zéro et si nous posons $\lambda = \lambda_0 + \frac{p}{q}$, nous pouvons prendre comme coordonnées de Q les quantités

$$(2) \qquad \lambda a_0 + \xi_0, \quad \lambda a_1 + \xi_1, \quad \lambda a_2 + \xi_2, \quad \lambda a_3 + \xi_3.$$

Étant donné Q, il n'existe pas deux valeurs différentes de λ telles que les coordonnées de Q aient la forme (2), sinon les a et les ξ seraient proportionnels. A chaque position de Q répond donc une valeur bien déterminée de λ. Lorsque AQ tend vers AB, les rapports mutuels des quantités (2) tendent vers les rapports mutuels des quantités (1) (§ 384), et λ tend vers λ_0. Le même résultat est valable pour tout point de AB autre que A. λ est donc une fonction continue de AQ lorsque AQ $\neq 0$. Il n'y a pas deux positions distinc-

tes de Q pour lesquelles les quantités (2) ont la même valeur (§ 380). λ varie donc toujours dans le même sens quand AQ croît. Lorsque AQ tend vers zéro, les rapports mutuels des quantités (2) tendent vers les rapports mutuels des quantités a_0, a_1, a_2, a_3 et $|\lambda|$ tend vers $+\infty$. Si λ tendait vers $-\infty$, λ serait nul pour une position convenable de Q entre A et B, ce qui est impossible. λ tend donc vers $+\infty$. Il en résulte que λ décroît quand AQ croît.

Désignons maintenant par C le point P [(R), A, | AB, $k\pi$]. Supposons que nous passions de A à C par la suite de régions normales (R_1), (R_2), ..., (R_n) et par la suite de points $A_1, A_2, \ldots, A_n$; en d'autres mots, le rôle que ces suites de régions normales et de points jouent vis à vis de (R), A, | AB et C est le même que celui joué au postulat XI par les suites de régions normales et de points indiquées avec les mêmes notations vis à vis de (R), A, a et B. Nous pouvons d'ailleurs faire en sorte que (R_1) coïncide avec (R).

Soit P un point quelconque appartenant à l'un des segments (AA_1), (A_1A_2), ..., $(A_{n-1}A_n)$ ou (A_nC). Soit $(A_{r-1}A_r)$ un de ces segments auquel P appartient. Posons

$$m = AA_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{r-2}A_{r-1} + A_{r-1}P.$$

On a toujours $0 < m < k\pi$.

Soient $O_1X_1Y_1Z_1$, $O_2X_2Y_2Z_2$, ..., $O_{n-1}X_{n-1}Y_{n-1}Z_{n-1}$ des systèmes d'axes coordonnés rectangulaires situés respectivement dans (R_1) (R_2), (R_2) (R_3), ..., (R_{n-1}) (R_n). Définissons maintenant les coordonnées homogènes de P par rapport aux axes OXYZ de la manière suivante : lorsque P appartient à (AA_2), nous déterminons les coordonnées de P par rapport aux axes OXYZ directement dans (R_1) ; lorsque P appartient à (A_2A_3) et est distinct de A_2 nous prenons les coordonnées de P par rapport aux axes OXYZ en passant par (R_2) et $O_1X_1Y_1Z_1$, comme nous l'avons expliqué au § 406 ; lorsque P appartient à (A_3A_4) et est distinct de A_3, nous passons par (R_2), (R_3) et par $O_1X_1Y_1Z_1$, $O_2X_2Y_2Z_2$, etc. ; lorsque P appartient à (A_nC) et est distinct de A_n, nous passons par (R_2), (R_3), ..., (R_n) et par $O_1X_1Y_1Z_1$, $O_2X_2Y_2Z_2$, ..., $O_{n-1}X_{n-1}Y_{n-1}Z_{n-1}$. Désignons par x_0, x_1, x_2, x_3

les coordonnées de P ainsi définies. Soit (T_1) la transformation linéaire orthogonale qui sert à passer dans (R_1) des coordonnées d'un point par rapport à $O_1X_1Y_1Z_1$ aux coordonnées du même point par rapport à OXYZ (voir § 388). Soient (T_2), (T_3), ..., (T_{n-1}) les transformations linéaires orthogonales analogues à (T_1) relatives respectivement à (R_2), $O_2X_2Y_2Z_2$, $O_1X_1Y_1Z_1$; (R_3), $O_3X_3Y_3Z_3$, $O_2X_2Y_2Z_2$; ...; (R_{n-1}), $O_{n-1}X_{n-1}Y_{n-1}Z_{n-1}$, $O_{n-2}X_{n-2}Y_{n-2}Z_{n-2}$.

Lorsque P appartient à (A_1A_2), il est clair qu'on passe au moyen de (T_1) des coordonnées de P dans (R_1) par rapport aux axes $O_1X_1Y_1Z_1$ à x_0, x_1, x_2, x_3 à moins d'un facteur de proportionnalité près. Les coordonnées de P dans (R_1) par rapport à $O_1X_1Y_1Z_1$ sont d'ailleurs identiques aux coordonnées de P dans (R_2) par rapport à $O_1X_1Y_1Z_1$. Il en résulte que lorsque P appartient à (A_1A_3) on passe tout le temps des coordonnées de P dans (R_2) par rapport à $O_1X_1Y_1Z_1$ à x_0, x_1, x_2, x_3 par la transformation (T_1), pourvu qu'on néglige dans x_0, x_1, x_2, x_3 un facteur de proportionnalité. Désignons par $(T_2)(T_1)$ la transformation linéaire orthogonale obtenue en effectuant successivement (T_2) et (T_1). En raisonnant sur (A_2A_4) comme nous l'avons fait sur (A_1A_3) on trouve que lorsque P appartient à (A_2A_4) on passe tout le temps des coordonnées de P dans (R_3) par rapport à $O_2X_2Y_2Z_2$ à x_0, x_1, x_2, x_3 par la transformation $(T_2)(T_1)$, pourvu qu'on néglige dans x_0, x_1, x_2, x_3 un facteur de proportionnalité. On trouve un résultat analogue pour les différents segments (A_2A_4), (A_3A_5), ..., $(A_{n-2}A_n)$. Finalement on trouve que lorsque P appartient à $(A_{n-1}C)$ on passe tout le temps des coordonnées de P dans (R_n) par rapport à $O_{n-1}X_{n-1}Y_{n-1}Z_{n-1}$ à x_0, x_1, x_2, x_3 par la transformation linéaire orthogonale $(T_{n-1})(T_{n-2})...(T_2)(T_1)$, pourvu qu'on néglige dans x_0, x_1, x_2, x_3 un facteur de proportionnalité.

Le fait que sur un même segment $(A_{r-1}A_{r+1})$ les x se déduisent par une transformation linéaire orthogonale des coordonnées de P déterminées directement dans la région (R_r) par rapport à un système d'axes coordonnés situés dans (R_r) nous permet d'étendre sans la moindre difficulté

différentes propriétés des dernières coordonnées aux premières. Ainsi, lorsque P reste sur le segment $(A_{r-1}A_{r+1})$, il est impossible qu'à deux positions distinctes de P répondent deux systèmes de valeurs des x ne différant que par un facteur de proportionnalité. En second lieu, lorsque P se déplace sur $(A_{r-1}A_{r+1})$ les x vérifient constamment un système de deux équations linéaires et homogènes distinctes. Soient (r) les équations relatives à $(A_{r-1}A_{r+1})$ et $(r+1)$ celles relatives à (A_rA_{r+2}). Soit P_1 un point de (A_rA_{r+1}) distinct de A_r et de A_{r+1} et soient x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 les coordonnées de P_1. Dès que les x sont des nombres assez voisins des x' et vérifiant (r), il répondra un point aux x, ce point sera dans (R_r) sur $A_{r-1}A_{r+1}$ et entre A_r et A_{r+1}, et les x vérifieront $(r+1)$. Réciproquement, dès que les x sont des nombres assez voisins des x' et vérifiant $(r+1)$, ils vérifient (r). Les équations (r) et $(r+1)$ sont donc équivalentes. Il en résulte que lorsque m varie de 0 à $k\pi$, les coordonnées x_0, x_1, x_2, x_3 de P vérifient constamment un même système de deux équations linéaires et homogènes distinctes. Soient

$$(3)\qquad d'_0x_0 + d'_1x_1 + d'_2x_2 + d'_3x_3 = 0,$$

$$(4)\qquad d''_0x_0 + d''_1x_1 + d''_2x_2 + d''_3x_3 = 0$$

ces deux équations. On a

$$(5)\qquad \left\| \begin{matrix} d'_0 & d'_1 & d'_2 & d'_3 \\ d''_0 & d''_1 & d''_2 & d''_3 \end{matrix} \right\| \neq 0.$$

Soient a'_0, a'_1, a'_2, a'_3 les valeurs des x lorsque P est en A_1, $a''_0, a''_1, a''_2, a''_3$ les valeurs des x répondant à A_2, etc., $a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, a_3^{(n)}$ celles répondant à A_n et c_0, c_1, c_2, c_3 celles répondant à C.

D'après le § 381 et d'après les propriétés connues des transformations linéaires orthogonales nous avons

$$(6)\quad \cos\frac{A_{r-1}A_r}{k} = \frac{a_0^{(r-1)}a_0^{(r)} + a_1^{(r-1)}a_1^{(r)} + a_2^{(r-1)}a_2^{(r)} + a_3^{(r-1)}a_3^{(r)}}{\mathbf{a}\sqrt{[a_0^{(r-1)}]^2 + [a_1^{(r-1)}]^2 + [a_2^{(r-1)}]^2 + [a_3^{(r-1)}]^2}},$$

$$\mathbf{a} = \pm\sqrt{[a_0^{(r)}]^2 + [a_1^{(r)}]^2 + [a_2^{(r)}]^2 + [a_3^{(r)}]^2}.$$

D'après le § 381 le signe qu'il faut prendre dans cette formule devant chacun des radicaux ne dépend que du point A_{r-1} ou A_r correspondant et des coordonnées de ce point; d'après le § 380 nous pouvons toujours choisir les coordonnées de ce point de façon que le radical ait le signe $+$. Supposons que les différentes coordonnées $a, a', a'', \ldots, a^{(n)}$ et c aient été choisies de cette façon et laissons ces coordonnées fixes. D'après ce que nous avons dit sur les signes des radicaux dans (6), nous aurons toujours

$$(7)\quad \cos\frac{A_{r-1}A_{r+1}}{k} = \frac{a_0^{(r-1)}a_0^{(r+1)} + a_1^{(r-1)}a_1^{(r+1)} + a_2^{(r-1)}a_2^{(r+1)} + a_3^{(r-1)}a_3^{(r+1)}}{\mathbf{a}_1\sqrt{[a_0^{(r-1)}]^2 + [a_1^{(r-1)}]^2 + [a_2^{(r-1)}]^2 + [a_3^{(r-1)}]^2}},$$

$$\mathbf{a}_1 = +\sqrt{[a_0^{(r+1)}]^2 + [a_1^{(r+1)}]^2 + [a_2^{(r+1)}]^2 + [a_3^{(r+1)}]^2}.$$

Plaçons-nous maintenant dans l'espace euclidien à quatre dimensions. Désignons par x_0, x_1, x_2, x_3 les coordonnées d'un point quelconque et par O' l'origine des coordonnées. Soient $A', A'_1, \ldots, A'_n, C'$ les points dont les coordonnées sont respectivement égales aux a, aux a', ..., aux $a^{(n)}$, aux c. Les points $A', A'_1, \ldots, A'_n$ et C' sont distincts de O' et sont situés dans le plan (3) (4) qui passe par O'. Effectuons une transformation linéaire orthogonale (**T**) qui laisse O' invariant et transforme (4) dans l'hyperplan $x_3 = 0$. Soit

$$(8)\qquad D'_0x_0 + D'_1x_1 + D'_2x_2 + D'_3x_3 = 0$$

le transformé de (3) dans (**T**). D'_0, D'_1 et D'_2 ne sont pas simultanément nuls d'après (5). Soient $A''(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, 0)$, $A''_1(\alpha'_0, \alpha'_1, \alpha'_2, 0)$, ..., $A''_n[\alpha_0^{(n)}, \alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, 0]$, $C''(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, 0)$ les transformés de $A', A'_1, \ldots, A'_n, C'$ dans (**T**). Prenons dans l'espace euclidien à trois dimensions un système d'axes coordonnés rectangulaires $O''X''Y''Z''$ et désignons encore par $A'', A''_1, \ldots, A''_n, C''$ les points dont les coordonnées par rapport aux axes $O''X''Y''Z''$ sont respectivement $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$; $\alpha'_0, \alpha'_1, \alpha'_2$; ...; $\alpha_0^{(n)}, \alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}$; $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$. On

a évidemment d'après (6) et (7)

$$\sphericalangle A''_{r-1}O''A''_r = \sphericalangle A'_{r-1}O'A'_r = \frac{A_{r-1}A_r}{k},$$

$$\sphericalangle A''_{r-1}O''A''_{r+1} = \sphericalangle A'_{r-1}O'A'_{r+1} = \frac{A_{r-1}A_{r+1}}{k}.$$

Les points A'', A''_1, ..., A''_n, C'' sont distincts de O'' et sont situés dans le plan

$$D'_0x_0 + D'_1x_1 + D'_2x_2 = 0.$$

On a

$$\frac{AA_2}{k} = \frac{AA_1}{k} + \frac{A_1A_2}{k},$$

$$\sphericalangle A''O''A''_2 = \sphericalangle A''O''A''_1 + \sphericalangle A''_1O''A''_2.$$

Il en résulte que $|O''A''_1$ est entre $|O''A''$ et $|O''A''_2$ (§ 46). De même, $|O''A''_2$ est entre $|O''A''_1$ et $|O''A''_3$, et ainsi de suite. Finalement $|O''A''_n$ est entre $|O''A''_{n-1}$ et $|O''C''$. On a

$$\frac{AA_1}{k} + \frac{A_1A_2}{k} + \cdots + \frac{A_{n-1}A_n}{k} + \frac{A_nC}{k} = \pi,$$

$$\sphericalangle A''O''A''_1 + \sphericalangle A''_1O''A''_2 + \cdots + \sphericalangle A''_{n-1}O''A''_n + \sphericalangle A''_nO''C'' = \pi.$$

$|O''C''$ coïncide donc avec la semi-droite opposée à $|O''A''$ et A'', C'' et O'' sont en ligne droite. Les nombres α_0, α_1, α_2, 0 sont donc proportionnels aux nombres γ_0, γ_1, γ_2, 0; les nombres a_0, a_1, a_2, a_3 sont donc proportionnels aux nombres c_0, c_1, c_2, c_3. En retournant à notre espace elliptique nous pouvons donc affirmer que les coordonnées de A ne diffèrent que par un facteur de proportionnalité des valeurs que prennent les coordonnées de P définies par la méthode que nous avons exposée lorsque P est en C. De la même manière on voit que lorsque P est distinct de A et de C les coordonnées de P ne sont jamais proportionnelles aux coordonnées de A.

Lorsque P appartient à (AA_2), il résulte de ce que nous avons vu relativement au point Q que l'on peut prendre comme coordonnées de P des quantités de la forme (2). Pour chaque position de P, λ est bien déterminé. Lorsque

m croît de 0 à AA_2, λ décroît constamment à partir de $+\infty$. Soient λ_1 et λ_2 les valeurs de λ répondant à A_1 et à A_2.

Supposons maintenant que P appartienne à (A_2A_3). En nous basant sur le § 395 et en nous rappelant que les x sont déduits des coordonnées de P dans (R_2) par rapport à $O_1X_1Y_1Z_1$ par une transformation linéaire orthogonale, nous trouvons aisément que les x sont de la forme

$$(9)\quad \begin{cases} x_0 = p(\lambda_1 a_0 + \xi_0) + q(\lambda_2 a_0 + \xi_0) = (p\lambda_1 + q\lambda_2)a_0 + (p+q)\xi_0, \\ x_1 = (p\lambda_1 + q\lambda_2)a_1 + (p+q)\xi_1, \\ x_2 = (p\lambda_1 + q\lambda_2)a_2 + (p+q)\xi_2, \\ x_3 = (p\lambda_1 + q\lambda_2)a_3 + (p+q)\xi_3. \end{cases}$$

Si $p+q$ pouvait devenir nul, il y aurait une position de P sur (A_2A_3) pour laquelle les coordonnées de P sont proportionnelles aux a, ce qui est impossible. $p+q$ est donc toujours différent de zéro. Posons $\dfrac{p\lambda_1 + q\lambda_2}{p+q} = \lambda$. Nous pouvons alors prendre comme coordonnées de P les quantités (2). Nous voyons en raisonnant de la même manière que pour Q que λ est parfaitement déterminé quand P est donné sur (A_2A_3), que la valeur de λ qui répond à A_2 est λ_2 et que λ est une fonction continue de m pour $AA_1 + A_1A_2 < m < AA_1 + A_1A_2 + A_2A_3$. Il en résulte en vertu de ce qui a été vu plus haut que λ doit varier dans le même sens lorsque m croît de AA_1 jusqu'à $AA_1 + A_1A_2 + A_2A_3$. Comme λ décroît quand m croît de AA_1 à $AA_1 + A_1A_2$, λ décroît encore quand m croît de $AA_1 + A_1A_2$ à $AA_1 + A_1A_2 + A_2A_3$. A $m = AA_1 + A_1A_2 + A_2A_3$ répond une valeur bien déterminée λ_3 de λ.

Nous pouvons maintenant raisonner sur les segments (A_3A_4), (A_4A_5), ..., $(A_{n-1}A_n)$, (A_nC) comme sur le segment (A_2A_3). Nous voyons alors qu'à chaque position de P autre que C ou A sur l'un des segments (AA_1), (A_1A_2), (A_2A_3), ..., $(A_{n-1}A_n)$, (A_nC) répond une valeur finie bien déterminée de λ; en d'autres mots, à chaque valeur de m satisfaisant à $0 < m < k\pi$ répond une valeur bien déter-

minée de λ. λ est une fonction continue de m et décroît quand m croît. On trouve comme pour le point A que $|\lambda|$ tend vers $+\infty$ quand m en croissant tend vers $k\pi$. Comme λ décroît, on a

$$\lim_{m \overrightarrow{<} k\pi} \lambda = -\infty.$$

Quand m croît continûment de 0 à $k\pi$, λ décroît donc continûment de $+\infty$ à $-\infty$. Il y a une position P_1 de P bien déterminée distincte de A et de C pour laquelle $\lambda = 0$ et pour laquelle par conséquent les ξ sont les coordonnées de P par rapport aux axes OXYZ.

Le théorème est donc établi.

408. Théorème. *Supposons donnés une région normale* (R_0), *un point quelconque* P *de l'espace et une suite de régions normales* (R'_0), (R''_0), ..., $[R_0^{(n)}]$ *telle que* (R_0) *et* (R'_0), (R'_0) *et* (R''_0), ..., $[R_0^{(n-1)}]$ *et* $[R_0^{(n)}]$ *ont au moins un point commun et que* P *est situé dans* $[R_0^{(n)}]$. *Supposons donnés ensuite quatre points* B, C, D, E *appartenant à* (R_0) *et non situés dans un même plan. Il existe quatre nombres positifs* β, γ, δ, ε *suffisamment petits pour que toutes les transformations congruentes de* (R_0) *dans lesquelles* B, C, D, E *ont des transformés* B′, C′, D′, E′ *satisfaisant à*

$$(1) \qquad BB' < \beta, \quad CC' < \gamma, \quad DD' < \delta, \quad EE' < \varepsilon$$

puissent être étendues au point P *par la chaîne de régions normales* (R'_0), (R''_0), ..., $[R_0^{(n)}]$ *d'après la méthode exposée dans le postulat* XII, *et pour que* PP′ *reste inférieur à un nombre positif arbitrairement petit donné à l'avance,* P′ *désignant le transformé de* P.

Démonstration. Soient B_1, C_1, D_1, E_1 quatre points appartenant à (R_0) (R'_0) non situés dans un même plan. Soit O′X′Y′Z′ un système d'axes coordonnés rectangulaires situé dans (R_0). Plaçons-nous dans (R_0) et rapportons les différents points de (R_0) aux axes O′X′Y′Z′. Soient b_0, b_1, b_2, b_3; c_0, c_1, c_2, c_3; d_0, d_1, d_2, d_3; e_0, e_1, e_2, e_3 les coordonnées de B, C, D, E; laissons ces coordonnées fixes. Soient β, γ, δ, ε quatre nombres positifs quelconques et soit (T_0) une transformation congruente quelconque de (R_0) dans laquelle B, C, D, E ont des transformés B′, C′,

D′, E′ satisfaisant à (1). Soient b'_0, b'_1, b'_2, b'_3 les coordonnées de B′. Nous pouvons toujours choisir les b' de manière à avoir $b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = b'^2_0 + b'^2_1 + b'^2_2 + b'^2_3$. Il y a deux manières de choisir ainsi les b'. Il résulte du § 384 que si β est assez petit, les b' choisis de l'une des deux façons seront respectivement de même signe que les b, et cela pour toutes les transformations (T_0). Prenons β assez petit pour que cette condition soit réalisée et choisissons comme coordonnées de B′ les b' qui ont le même signe que les b correspondants. Dans chaque transformation (T_0) le point B′ a alors des coordonnées parfaitement déterminées. Prenons maintenant γ, δ, ε assez petits pour qu'ils satisfassent à des conditions analogues à celle à laquelle nous avons assujeti β et définissons les coordonnées c'_0, c'_1, c'_2, c'_3; d'_0, d'_1, d'_2, d'_3; e'_0, e'_1, e'_2, e'_3 de C′, D′, E′ de la même manière que celles de B′. Il résulte encore du § 384 que si $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sont assez petits, les b', c', d' et e' resteront arbitrairement voisins des b, c, d et e correspondants.

Considérons maintenant les quantités $b_0c_0 + b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3$ et $b'_0c'_0 + b'_1c'_1 + b'_2c'_2 + b'_3c'_3$. Dans toute transformation (T_0) on a BC = B′C′ et d'après le § 381

$$|b_0c_0 + b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3| = |b'_0c'_0 + b'_1c'_1 + b'_2c'_2 + b'_3c'_3|.$$

Comme les b' et les c' restent arbitrairement voisins des b et des c lorsque $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sont assez petits, on a

$$(2) \quad b_0c_0 + b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = b'_0c'_0 + b'_1c'_1 + b'_2c'_2 + b'_3c'_3$$

pour toutes les transformations (T_0) dès que $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sont assez petits. Prenons désormais $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ assez petits pour que cette condition soit remplie. De la même manière nous pouvons prendre $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ assez petits pour que dans toutes les transformations (T_0) on ait

$$(3) \quad \begin{cases} \Sigma bd = \Sigma b'd', \quad \Sigma be = \Sigma b'e', \quad \Sigma cd = \Sigma c'd', \\ \Sigma ce = \Sigma c'e', \quad \Sigma de = \Sigma d'e'. \end{cases}$$

Puisque B, C, D, E d'une part et B′, C′, D′, E′ d'autre part ne sont pas dans un même plan, nous trouvons aisé-

ment d'après le § 392

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \\ e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} b'_0 & b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ c'_0 & c'_1 & c'_2 & c'_3 \\ d'_0 & d'_1 & d'_2 & d'_3 \\ e'_0 & e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Considérons maintenant une transformation (T_0). Regardons un moment B, C, D, E, B', C', D', E' avec leurs coordonnées b, c, d, e, b', c', d', e' comme des points de l'espace euclidien à quatre dimensions. D'après (4) l'origine et B, C, D, E d'une part, l'origine et B', C', D', E' d'autre part ne sont pas dans un même hyperplan. D'après la manière dont les b', c', d' et e' ont été choisis et d'après (2) et (3) on constate immédiatement que les distances mutuelles de B, C, D, E et de l'origine sont égales chacune à chacune aux distances mutuelles de B', C', D', E' et de l'origine. Il y a donc une transformation linéaire orthogonale et une seule qui laisse l'origine invariante et transforme B, C, D, E respectivement en B', C', D', E' (§ 401, lemme). Soient

$$(5)\qquad \begin{cases} x'_0 = L_0 x_0 + L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3, \\ x'_1 = L'_0 x_0 + L'_1 x_1 + L'_2 x_2 + L'_3 x_3, \\ x'_2 = L''_0 x_0 + L''_1 x_1 + L''_2 x_2 + L''_3 x_3, \\ x'_3 = L'''_0 x_0 + L'''_1 x_1 + L'''_2 x_2 + L'''_3 x_3 \end{cases}$$

les formules de la transformation. Nous avons ainsi fait correspondre à chaque transformation (T_0) un système de nombres L bien déterminés. Lorsqu'on remplace dans (5) les x successivement par les b, les c, les d et les e, on obtient successivement les b', les c', les d' et les e'. Remplaçons dans la première des équations (5) x'_0, x_0, x_1, x_2, x_3 successivement par b'_0, b_0, b_1, b_2, b_3; c'_0, c_0, c_1, c_2, c_3; d'_0, d_0, d_1, d_2, d_3; e'_0, e_0, e_1, e_2, e_3. Dans le système des quatre équations obtenues le déterminant des coefficients de L_0, L_1, L_2 et L_3 est différent de zéro et nous pouvons résoudre ces équations par rapport à L_0, L_1, L_2, L_3. Lorsque β, γ, δ, ε sont assez petits, b'_0, c'_0, d'_0, e'_0 diffèrent arbitrairement peu de b_0, c_0, d_0, e_0; L_0, L_1, L_2, L_3 différeront arbitrairement peu des quantités obtenues en

résolvant les équations

$$b_0 = l_0 b_0 + l_1 b_1 + l_2 b_2 + l_3 b_3,$$
$$c_0 = l_0 c_0 + l_1 c_1 + l_2 c_2 + l_3 c_3,$$
$$d_0 = l_0 d_0 + l_1 d_1 + l_2 d_2 + l_3 d_3,$$
$$e_0 = l_0 e_0 + l_1 e_1 + l_2 e_2 + l_3 e_3$$

par rapport à l_0, l_1, l_2, l_3. $|L_0 - 1|$, $|L_1|$, $|L_2|$, $|L_3|$ resteront donc arbitrairement petits pour toutes les transformations (T_0) dès que β, γ, δ, ε sont assez petits; il en est de même de $|L'_0|$, $|L'_1 - 1|$, $|L'_2|$, $|L'_3|$, $|L''_0|$, $|L''_1|$, $|L''_2 - 1|$, $|L''_3|$, $|L'''_0|$, $|L'''_1|$, $|L'''_2|$, $|L'''_3 - 1|$.

Interprétons maintenant la transformation définie par (5) comme une transformation de (R_0). A chaque transformation (T_0) correspond une transformation (5); de même que (T_0), (5) transforme B, C, D, E respectivement en B′, C′, D′, E′; toutefois nous ne pouvons pas affirmer que ces deux transformations sont identiques (§ 390, remarque).

Remplaçons dans (5) les x par les coordonnées de B_1. Si β, γ, δ, ε sont assez petits, les x' fournis par (5) différeront arbitrairement peu des coordonnées de B_1 introduites dans (5) et cela pour toutes les transformations (T_0); cela résulte de ce que L_0, L'_1, L''_2, L'''_3 tendent uniformément vers $+1$ et les autres L vers zéro, lorsque $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ tendent vers zéro. Lorsque β, γ, δ, ε sont assez petits, nous pourrons donc trouver un point B'_1 qui a comme coordonnées les valeurs des x' qui répondent aux coordonnées de B_1 (§ 382). B'_1 sera le transformé de B_1 dans (5). $B_1B'_1$ reste arbitrairement petit lorsque β, γ, δ, ε sont assez petits (§ 383); $|BB_1 - B'B'_1|$ reste donc aussi arbitrairement petit. Or, on a toujours $BB_1 = B'B'_1$ ou $BB_1 + B'B'_1 = \pi$ (§ 381). Lorsque β, γ, δ, ε sont assez petits on a donc toujours $BB_1 = B'B'_1$. En continuant à raisonner ainsi on trouve finalement que l'on peut prendre β, γ, δ, ε assez petits pour que les conditions suivantes soient remplies : pour toutes les transformations (T_0) les points B_1, C_1, D_1, E_1 ont des transformés B'_1, C'_1, D'_1, E'_1 dans (5) et l'on a

$$BB_1 = B'B'_1,\quad CB_1 = C'B'_1,\quad DB_1 = D'B'_1,\quad EB_1 = E'B'_1$$

pour le point B_1 et des égalités analogues pour les points C_1, D_1 et E_1.

Par conséquent, dès que β, γ, δ, ε sont assez petits, B_1, C_1, D_1, E_1 ont des homologues B'_1, C'_1, D'_1, E'_1 dans toutes les transformations (T_0) et $B_1B'_1$, $C_1C'_1$, $D_1D'_1$, $E_1E'_1$ restent arbitrairement petits.

En appliquant la propriété que nous venons d'établir pour B, C, D, E et pour (R_0) à B_1, C_1, D_1, E_1 et à (R'_0), on établit immédiatement ce qui suit : dès que β, γ, δ, ε sont assez petits, B_1, C_1, D_1, E_1 ont des homologues B'_1, C'_1, D'_1, E'_1 dans chaque transformation (T_0); et dans la transformation congruente de (R'_0) qui porte B_1, C_1, D_1, E_1 respectivement en B'_1, C'_1, D'_1, E'_1, quatre points fixes donnés à l'avance B_2, C_2, D_2, E_2 appartenant à (R'_0) (R''_0) et non situés dans un même plan ont toujours des transformés B'_2, C'_2, D'_2, E'_2 et $B_2B'_2$, $C_2C'_2$, $D_2D'_2$, $E_2E'_2$ restent arbitrairement petits.

On trouve ainsi de proche en proche que si β, γ, δ, ε sont assez petits, toutes les transformations (T_0) peuvent être étendues au point P par la chaîne de régions normales (R'_0), (R''_0), ..., $[R_0^{(n)}]$ et que la mesure du segment déterminé par P et son transformé reste arbitrairement petite.

C. q. f. d.

409. Théorème. *Supposons donnés une région normale* (R) *et dans* (R) *un système d'axes coordonnés rectangulaires* OXYZ. *Si quatre nombres a'_0, a'_1, a'_2, a'_3 sont des coordonnées d'un point* A *de l'espace par rapport aux axes* OXYZ *et si quatre autres nombres a''_0, a''_1, a''_2, a''_3 sont aussi des coordonnées du même point* A *par rapport aux mêmes axes* OXYZ, *les nombres a''_0, a''_1, a''_2, a''_3 ne diffèrent que par un facteur de proportionnalité des nombres a'_0, a'_1, a'_2, a'_3.*

Démonstration. Supposons le théorème à démontrer faux. Alors il est possible de trouver deux suites de régions normales (R_1), (R_2), ..., (R_n) et (R'_1), (R'_2), ..., (R'_m) et deux suites de systèmes d'axes coordonnés rectangulaires $O_1X_1Y_1Z_1$, $O_2X_2Y_2Z_2$, ..., $O_{n-1}X_{n-1}Y_{n-1}Z_{n-1}$ et $O'_1X'_1Y'_1Z'_1$, $O'_2X'_2Y'_2Z'_2$, ..., $O'_{m-1}X'_{m-1}Y'_{m-1}Z'_{m-1}$ jouissant des propriétés suivantes : O appartient à (R_1); (R_1) et (R_2), (R_2) et (R_3), ..., (R_{n-1}) et (R_n) ont au moins

un point commun ; $O_1X_1Y_1Z_1$ est dans $(R_1)(R_2)$, $O_2X_2Y_2Z_2$ dans $(R_2)(R_3)$, ..., $O_{n-1}X_{n-1}Y_{n-1}Z_{n-1}$ dans $(R_{n-1})(R_n)$; A appartient à (R_n); O appartient à (R'_1); (R'_1) et (R'_2), (R'_2) et (R'_3), ..., (R'_{m-1}) et (R'_m) ont au moins un point commun ; $O'_1X'_1Y'_1Z'_1$ est dans $(R'_1)(R'_2)$, $O'_2X'_2Y'_2Z'_2$ dans $(R'_2)(R'_3)$, ..., $O'_{m-1}X'_{m-1}Y'_{m-1}Z'_{m-1}$ dans $(R'_{m-1})(R'_m)$; A appartient à (R'_m). Les coordonnées de A par rapport aux axes OXYZ lorsqu'on passe par les régions (R_1), (R_2), ..., (R_n) et par les axes $O_1X_1Y_1Z_1$, $O_2X_2Y_2Z_2$, ..., $O_{n-1}X_{n-1}Y_{n-1}Z_{n-1}$ sont a'_0, a'_1, a'_2, a'_3; les coordonnées de A par rapport aux axes OXYZ lorsqu'on passe par les régions (R'_1), (R'_2), ..., (R'_m) et par les axes $O'_1X'_1Y'_1Z'_1$, $O'_2X'_2Y'_2Z'_2$, .., $O'_{m-1}X'_{m-1}Y'_{m-1}Z'_{m-1}$ sont a''_0, a''_1, a''_2, a''_3, et les a'' ne sont pas proportionnels aux a'. Nous allons montrer que l'ensemble de ces différentes suppositions conduit à une absurdité.

Soient X_0, Y_0, Z_0 trois points de (R) distincts de O, situés respectivement sur |OX, |OY, |OZ et appartenant tous les trois à (R_1) et à (R'_1). Soit $O'X'Y'Z'$ un système d'axes coordonnés rectangulaires situé dans $(R_n)(R'_m)$. Soient a_0, a_1, a_2, a_3 les coordonnées de A par rapport aux axes $O'X'Y'Z'$ déterminées directement dans $(R_n)(R'_m)$. Convenons de laisser les a', les a'' et les a fixes.

Soit (T_1) la transformation linéaire orthogonale qui sert à passer dans (R_1) des coordonnées d'un point par rapport à $O_1X_1Y_1Z_1$ aux coordonnées du même point par rapport à $OX_0Y_0Z_0$. Ecrivons

$$(T_1) \dots (R_1) \dots O_1X_1Y_1Z_1 \longrightarrow OX_0Y_0Z_0.$$

Considérons de même les transformations linéaires orthogonales suivantes :

$$\begin{array}{llll}
(T_2) & \dots (R_2) & \dots O_2X_2Y_2Z_2 & \longrightarrow O_1X_1Y_1Z_1, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & & & \\
(T_{n-1}) & \dots (R_{n-1}) & \dots O_{n-1}X_{n-1}Y_{n-1}Z_{n-1} & \longrightarrow O_{n-2}X_{n-2}Y_{n-2}Z_{n-2}, \\
(T_n) & \dots (R_n) & \dots O'X'Y'Z' & \longrightarrow O_{n-1}X_{n-1}Y_{n-1}Z_{n-1}. \\
(T'_1) & \dots (R'_1) & \dots O'_1X'_1Y'_1Z'_1 & \longrightarrow OX_0Y_0Z_0, \\
(T'_2) & \dots (R'_2) & \dots O'_2X'_2Y'_2Z'_2 & \longrightarrow O'_1X'_1Y'_1Z'_1, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & & & \\
(T'_{m-1}) & \dots (R'_{m-1}) & \dots O'_{m-1}X'_{m-1}Y'_{m-1}Z'_{m-1} & \longrightarrow O'_{m-2}X'_{m-2}Y'_{m-2}Z'_{m-2}, \\
(T'_m) & \dots (R'_m) & \dots O'X'Y'Z' & \longrightarrow O'_{m-1}X'_{m-1}Y'_{m-1}Z'_{m-1}.
\end{array}$$

Convenons d'indiquer en général par $(T)^{-1}$ la transformation linéaire orthogonale obtenue en remplaçant chaque point de l'espace euclidien à quatre dimensions par le point dont il est le transformé dans la transformation linéaire orthogonale (T). Désignons par q_1, q', q'_1, ... des nombres réels non nuls quelconques.

D'après le § 406 la transformation

(1) $(T_n)(T_{n-1}) \dots (T_2)(T_1)$ transforme
a_0, a_1, a_2, a_3 en $q'a'_0, q'a'_1, q'a'_2, q'a'_3$,

et

(2) $(T'_m)(T'_{m-1}) \dots (T'_2)(T'_1)$ transforme
a_0, a_1, a_2, a_3 en $q''a''_0, q''a''_1, q''a''_2, q''a''_3$.

Par conséquent,

(3) $(T_1)^{-1}(T_2)^{-1} \dots (T_{n-1})^{-1}(T_n)^{-1}$ transforme
$q'a'_0, q'a'_1, q'a'_2, q'a'_3$ en a_0, a_1, a_2, a_3.

Supposons que

(4) $(T_1)^{-1}(T_2)^{-1} \dots (T_{n-1})^{-1}(T_n)^{-1}$ transforme
$q''a''_0, q''a''_1, q''a''_2, q''a''_3$ en b_0, b_1, b_2, b_3.

D'après (3) et (4) les b ne sont pas proportionnels aux a.

Plaçons-nous maintenant dans (R_n). Il existe un nombre positif λ suffisamment petit pour que dans (R_n) existe un point B dont les coordonnées par rapport à O'X'Y'Z' déterminées directement dans (R_n) sont $a_0 + \lambda b_0$, $a_1 + \lambda b_1$, $a_2 + \lambda b_2$, $a_3 + \lambda b_3$. Il est clair que B est distinct de A. Élevons en A une perpendiculaire à AB et soit C un point de cette perpendiculaire distinct de A. Élevons en A la perpendiculaire au plan ABC et soit D un point de cette perpendiculaire autre que A. Soient α, β, γ, δ quatre nombres positifs et considérons dans (R_n) toutes les transformations congruentes $(\mathbf{T})$ dans lesquelles A, B, C, D ont des homologues A', B', C', D' satisfaisant à

$$AA' < \alpha, \quad BB' < \beta, \quad CC' < \gamma, \quad DD' < \delta.$$

D'après le § 408 nous pouvons prendre $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ assez petits pour que toutes les transformations $(\mathbf{T})$ puissent être étendues de proche en proche à quatre points non situés dans un même plan choisis successivement dans (R_{n-1}), ...,

(R_2), (R_1), (R'_1), (R'_2), ..., (R'_{m-1}) et R'_m et pour que dans la transformation congruente obtenue dans (R'_m) le point A ait toujours un transformé. Prenons α, β, γ, δ assez petits pour que ces conditions soient satisfaites et laissons maintenant ces quatre nombres fixes.

Nous pouvons trouver dans (R_n) dans le plan ABC deux points fixes B′ et C′ satisfaisant aux conditions suivantes : $|AB'$ est entre $|AB$ et $|AC$, $|AC'$ est entre $|AC$ et la semi-droite opposée à $|AB$; $\sphericalangle BAB' = \sphericalangle CAC'$, $AB' = AB$, $AC' = AC$, $BB' < \beta$, $CC' < \gamma$. Il existe dans (R_n) une transformation congruente et une seule qui porte A en A, D en D, B en B′ et C en C′; elle appartient à la classe des transformations (**T**). Employons actuellement le signe (**T**) pour désigner cette transformation particulière bien déterminée. (**T**) pourra être étendu successivement à (R_{n-1}), (R_{n-2}), ..., (R_2), (R_1), (R'_1), (R'_2), ..., (R'_{m-1}) et (R'_m) et dans la transformation obtenue dans (R'_m) le point A aura un transformé. Ce transformé sera le point A même (§ 400, postulat XII).

Désignons par (T) une des deux transformations linéaires orthogonales de l'espace euclidien à quatre dimensions dont nous avons établi l'existence au § 389 et servant à passer des coordonnées d'un point de (R_n) qui a un transformé dans (**T**) aux coordonnées de ce transformé, les coordonnées étant chaque fois déterminées directement dans (R_n) par rapport aux axes O′X′Y′Z′. Il est clair que

(5) (T) transforme a_0, a_1, a_2, a_3 en $q_1a_0, q_1a_1, q_1a_2, q_1a_3$.

Supposons que

(6) (T) transforme b_0, b_1, b_2, b_3 en b'_0, b'_1, b'_2, b'_3.

Si les b' étaient proportionnels aux b, nous aurions $b'_0 = q'_1b_0$, $b'_1 = q'_1b_1$, $b'_2 = q'_1b_2$, $b'_3 = q'_1b_3$; $a_0 + \lambda b_0$, $a_1 + \lambda b_1$, $a_2 + \lambda b_2$, $a_3 + \lambda b_3$ seraient transformés en $q_1a_0 + \lambda q'_1b_0$, $q_1a_1 + \lambda q'_1b_1$, $q_1a_2 + \lambda q'_1b_2$, $q_1a_3 + \lambda q'_1b_3$ ou $q'_1(\lambda b_0 + a_0) + (q_1 - q'_1)a_0$, $q'_1(\lambda b_1 + a_1) + (q_1 - q'_1)a_1$, $q'_1(\lambda b_2 + a_2) + (q_1 - q'_1)a_2$, $q'_1(\lambda b_3 + a_3) + (q_1 - q'_1)a_3$. Ces derniers nombres seraient donc les coordonnées de B′ par rapport aux axes O′X′Y′Z′ déterminées directe-

ment dans (R_n). Comme $\lambda b_0 + a_0$, $\lambda b_1 + a_1$, $\lambda b_2 + a_2$, $\lambda b_3 + a_3$ et a_0, a_1, a_2, a_3 vérifient les équations de AB (§ 393), les coordonnées de B′ vérifieraient également ces équations et B′ serait sur AB, ce qui n'est pas le cas. Les b' ne sont donc pas proportionnels aux b.

D'après (4) et (2) la transformation

(7) $(T_n)(T_{n-1}) \ldots (T_2)(T_1)(T'_1)^{-1}(T'_2)^{-1} \ldots (T'_{m-1})^{-1}(T'_m)^{-1}$
transforme b_0, b_1, b_2, b_3 en a_0, a_1, a_2, a_3.

Supposons que

(8) $(T_n)(T_{n-1}) \ldots (T_2)(T_1)(T'_1)^{-1}(T'_2)^{-1} \ldots (T'_{m-1})^{-1}(T'_m)^{-1}$
transforme b'_0, b'_1, b'_2, b'_3 en α_0, α_1, α_2, α_3.

Comme les b' ne sont pas proportionnels aux b, il résulte de (7) et (8) que les α ne sont pas proportionnels aux a.

Considérons maintenant un point P dans (R_n) qui a un transformé P′ dans (**T**). Il est clair que nous obtiendrons les coordonnées de P′ par rapport aux axes $O_{n-1}X_{n-1}Y_{n-1}Z_{n-1}$ en soumettant celles de P à la transformation $(T_n)^{-1}(T)(T_n)$ [les coordonnées de P et de P′ étant déterminées directement dans (R_n)].

Appelons maintenant $(\mathbf{T}_{\text{I}})$ la transformation congruente déterminée par (**T**) dans (R_n) (R_{n-1}) et appelons $(\mathbf{T}_{\text{II}})$ la transformation congruente déterminée par $(\mathbf{T}_{\text{I}})$ dans (R_{n-1}). Appliquons maintenant le § 389 successivement à (R_n) (R_{n-1}), $(\mathbf{T}_{\text{I}})$, $O_{n-1}X_{n-1}Y_{n-1}Z_{n-1}$ et à (R_{n-1}), $(\mathbf{T}_{\text{II}})$, $O_{n-1}X_{n-1}Y_{n-1}Z_{n-1}$. Nous trouverons ainsi deux transformations linéaires orthogonales (T_{I}) et (T'_{I}) répondant à $(\mathbf{T}_{\text{I}})$ et deux transformations linéaires orthogonales (T_{II}) et (T'_{II}) répondant à $(\mathbf{T}_{\text{II}})$. Il résulte du § 389 que $(T_n)^{-1}$ $(T)(T_n)$ est identique à (T_{I}) ou à (T'_{I}); (T_{II}) est identique à (T_{I}) ou à (T'_{I}) et il en est de même de (T'_{II}). Supposons par exemple (T_{II}) identique à (T_{I}) et (T'_{II}) à (T'_{I}). Alors $(T_n)^{-1}(T)(T_n)$ est identique à (T_{II}) ou à (T'_{II}). En d'autres mots, si P est un point de (R_{n-1}) qui a un transformé P′ dans $(\mathbf{T}_{\text{II}})$, nous obtiendrons les coordonnées de P′ par rapport aux axes $O_{n-1}X_{n-1}Y_{n-1}Z_{n-1}$ en soumettant celles de P à la transformation $(T_n)^{-1}(T)(T_n)$.

Par conséquent, si P est un point de (R_{n-1}) qui a un

transformé P′ dans la transformation congruente de (R_{n-1}) obtenue en étendant (**T**) à (R_{n-1}), nous obtiendrons les coordonnées de P′ par rapport aux axes $O_{n-2}X_{n-2}Y_{n-2}Z_{n-2}$ en soumettant celles de P à la transformation $(T_{n-1})^{-1}$ $[(T_n)^{-1}(T)(T_n)](T_{n-1})$ ou $(T_{n-1})^{-1}(T_n)^{-1}(T)(T_n)(T_{n-1})$.

On arrive ainsi de proche en proche au résultat suivant : Si P est un point de (R'_m) qui a un transformé P′ dans la transformation congruente de (R'_m) obtenue en étendant (**T**) successivement à (R_{n-1}), (R_{n-2}), ..., (R_2), (R_1), (R'_1), (R'_2), ..., (R'_{m-1}) et (R'_m), on trouve les coordonnées de P′ par rapport aux axes O′X′Y′Z′ [ces coordonnées étant déterminées directement dans (R'_m)] en soumettant celles de P à la transformation

$$(9)\quad \begin{cases} (T'_m)(T'_{m-1})\ldots(T'_2)(T'_1)(T_1)^{-1}(T_2)^{-1}\ldots(T_{n-1})^{-1}(T_n)^{-1} \\ (T)(T_n)(T_{n-1})\ldots(T_2)(T_1)(T'_1)^{-1}(T'_2)^{-1}\ldots(T'_{m-1})^{-1}(T'_m)^{-1}. \end{cases}$$

(9) doit donc transformer a_0, a_1, a_2, a_3 en des quantités proportionnelles à a_0, a_1, a_2, a_3. Or, d'après (2), (4), (6) et (8) la transformation (9) transforme a_0, a_1, a_2, a_3 en $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Comme les α ne sont pas proportionnels aux a, nous arrivons à une absurdité.

Le théorème est donc établi.

Remarque. Le théorème que nous venons d'établir est d'une importance capitale. Il nous apprend que les coordonnées d'un point par rapport à des axes bien déterminés OXYZ sont indépendantes de la chaîne de régions normales empiétant l'une sur l'autre et de la chaîne de systèmes d'axes coordonnés intermédiaires dont on se sert pour passer de la région normale qui contient les axes OXYZ au point considéré. En d'autres mots, à chaque point répond un système de valeurs des coordonnées bien déterminé à moins d'un facteur de proportionnalité près. D'après le § 407 il répond au moins un point à tout système de valeurs non toutes nulles des coordonnées. On peut maintenant se demander s'il pourraient y avoir plusieurs points répondant à un même système de valeurs des coordonnées. Le théorème suivant nous fournit un premier renseignement relatif à cette question.

410. Théorème. *Il est impossible que deux points distincts* A *et* A′ *appartenant à une même région normale* (R_n) *aient les mêmes coordonnées* a_0, a_1, a_2, a_3 *par rapport à un même système d'axes coordonnés rectangulaires* OXYZ.

Démonstration. Supposons le théorème à démontrer faux. Soit (R_1) une région normale contenant OXYZ. Soient (R_2), (R_3), ..., (R_{n-1}) une suite de régions normales et $O_1X_1Y_1Z_1$, $O_2X_2Y_2Z_2$, ..., $O_{n-1}X_{n-1}Y_{n-1}Z_{n-1}$ une suite de systèmes d'axes coordonnés satisfaisant aux conditions suivantes : (R_1) et (R_2), (R_2) et (R_3), ..., (R_{n-1}) et (R_n) ont au moins un point commun; $O_1X_1Y_1Z_1$ est dans (R_1) (R_2), $O_2X_2Y_2Z_2$ dans (R_2) (R_3), ..., $O_{n-1}X_{n-1}Y_{n-1}Z_{n-1}$ est dans (R_{n-1}) (R_n). Donnons des coordonnées aux différents points de (R_n) par rapport aux axes OXYZ en passant par les régions (R_2), ..., (R_{n-1}) et par les axes $O_1X_1Y_1Z_1$, $O_2X_2Y_2Z_2$, ..., $O_{n-1}X_{n-1}Y_{n-1}Z_{n-1}$. Les coordonnées de A seront a_0, a_1, a_2, a_3 et celles de A′ seront aussi a_0, a_1, a_2, a_3 (§ 409). Or, on passe des coordonnées des différents points de (R_n) par rapport aux axes OXYZ aux coordonnées des mêmes points par rapport aux axes $O_{n-1}X_{n-1}Y_{n-1}Z_{n-1}$ par une même transformation linéaire orthogonale. Les coordonnées de A par rapport aux axes $O_{n-1}X_{n-1}Y_{n-1}Z_{n-1}$ sont donc égales à celles de A′ par rapport aux mêmes axes. Cela est impossible. A et A′ ne peuvent donc pas avoir des coordonnées égales par rapport aux axes OXYZ et le théorème est établi.

411. Théorème. *Supposons que l'on donne deux régions normales* (R) *et* (R′) *et deux systèmes d'axes coordonnés rectangulaires* OXYZ *et* O′X′Y′Z′ *situés respectivement dans* (R) *et dans* (R′). *Il existe une transformation linéaire orthogonale* (T) *de l'espace euclidien à quatre dimensions telle qu'en soumettant les coordonnées d'un point quelconque de l'espace elliptique par rapport aux axes* OXYZ *à la transformation* (T) *on obtient les coordonnées du même point par rapport aux axes* O′X′Y′Z′ *multipliées par un facteur de proportionnalité.*

Démonstration. Soient (R'_2), (R'_3), ..., (R'_{n-1}) une suite de régions normales et $O'_1X'_1Y'_1Z'_1$, $O'_2X'_2Y'_2Z'_2$, ..., $O'_{n-1}X'_{n-1}Y'_{n-1}Z'_{n-1}$ une suite de systèmes d'axes coor-

donnés satisfaisant aux conditions suivantes : (R') et (R'_2), (R'_2) et (R'_3), ..., (R'_{n-1}) et (R) ont au moins un point commun ; $O'_1X'_1Y'_1Z'_1$ est dans (R') (R'_2), $O'_2X'_2Y'_2Z'_2$ dans (R'_2) (R'_3), ..., $O'_{n-1}X'_{n-1}Y'_{n-1}Z'_{n-1}$ dans (R'_{n-1}) (R).

Soit (T'_1) la transformation linéaire orthogonale qui sert à passer dans (R') des coordonnées d'un point par rapport à $O'_1X'_1Y'_1Z'_1$ aux coordonnées du même point par rapport à $O'X'Y'Z'$. Écrivons

$$(T'_1) \ldots (R') \ldots O'_1X'_1Y'_1Z'_1 \longrightarrow O'X'Y'Z'.$$

Considérons de même les transformations linéaires orthogonales suivantes :

$$(T'_2) \ldots (R'_2) \ldots O'_2X'_2Y'_2Z'_2 \longrightarrow O'_1X'_1Y'_1Z'_1,$$

. . . .

$$(T'_{n-1}) \ldots (R'_{n-1}) \ldots O'_{n-1}X'_{n-1}Y'_{n-1}Z'_{n-1} \longrightarrow O'_{n-2}X'_{n-2}Y'_{n-2}Z'_{n-2},$$

$$(T'_n) \ldots (R) \ldots OXYZ \longrightarrow O'_{n-1}X'_{n-1}Y'_{n-1}Z'_{n-1}.$$

D'après le § 409 nous pouvons déterminer les coordonnées d'un point quelconque par rapport aux axes $O'X'Y'Z'$ en passant de (R') à (R) par (R'_2), (R'_3), ..., (R'_{n-1}) et de (R) à une région normale contenant le point en question par une nouvelle suite de régions normales empiétant l'une sur l'autre. Il en résulte que pour la transformation linéaire orthogonale (T) dont il est question dans l'énoncé nous pouvons prendre la transformation $(T'_n)(T'_{n-1}) \ldots (T'_2)(T'_1)$.

412. Définition. Si deux points distincts ont mêmes coordonnées par rapport à un même système d'axes coordonnés, ils auront encore mêmes coordonnées par rapport à tout autre système d'axes coordonnés (§ 411). Nous dirons que deux points sont *équivalents* lorsqu'ils sont distincts et ont mêmes coordonnées par rapport à un même système d'axes coordonnés.

Théorème. *Deux points équivalents n'appartiennent jamais à une même région normale.*

Démonstration. Ce théorème résulte directement du § 410.

413. Théorème. *Supposons donnés une région normale* (R_1), *un point* A *appartenant à* (R_1) *et une semi-droite* a *de* (R_1) *issue*

de A. *Le point* $P[(R_1), A, a, m]$ *a mêmes coordonnées que le point* A *par rapport à un système d'axes coordonnés rectangulaires quelconque lorsque* m *est un multiple de* $k\pi$. *Au contraire les coordonnées de* P *ne sont jamais proportionnelles à celles de* A *lorsque* m *n'est pas un multiple de* $k\pi$.

Démonstration. Ce théorème résulte de ce que nous avons vu au § 407.

414. Théorème. *Supposons donnés une région normale* (R_1), *un point* A *de* (R_1) *et une semi-droite* a *de* (R_1) *issue de* A. *Si le point* $P[(R_1), A, a, k\pi]$ *coïncide avec* A, *tous les points* $P[(R_1), A, a, m]$ *où* m *est un multiple de* $k\pi$ *coïncident avec* A.

Démonstration. Supposons que $P[(R_1), A, a, k\pi]$ coïncide avec A. Alors il existe une suite de régions normales $(R_2), \ldots, (R_n)$ et une suite de points $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ jouissant des propriétés suivantes : (R_1) et (R_2), (R_2) et (R_3), ..., (R_{n-1}) et (R_n) ont au moins un point commun; A, A_1 et A_2 sont distincts, appartiennent à (R_1) et y sont en ligne droite, A_1 étant entre A et A_2; ...; A_{n-1}, A_n, A sont distincts, appartiennent à (R_n) et y sont en ligne droite, A_n étant entre A_{n-1} et A ; la semi-droite $|AA_1$ de (R_1) coïncide avec a; enfin on a $AA_1 + A_1A_2 + \cdots + A_nA = k\pi$.

Rapportons les différents points à un système d'axes coordonnés OXYZ situé dans (R_1). Considérons les équations de la droite AA_2 de (R_1). Nous savons d'après le § 407 que les coordonnées d'un point quelconque de l'un des segments (AA_1), (A_1A_2), ..., (A_nA) vérifient ces équations.

Nous pouvons trouver sur (A_nA) un point D distinct de A appartenant à (R_1). Les coordonnées de D vérifient les équations de la droite AA_2 de (R_1) et D se trouve donc sur cette droite.

Supposons que D soit sur a. Nous pouvons alors trouver un point E distinct de A qui est à la fois entre A et D et entre A et A_1 tel que $EA < \frac{k\pi}{2}$. E est entre A et A_n et coïncide avec le point $P[(R_1), A, a, k\pi - EA]$ ou le point $P[(R_1), A, a, EA + (k\pi - 2EA)]$. Le point $P[(R_1), A, a, EA]$ n'est autre que le point E. Le point $P[(R_1), A, a, EA$

$+ (k\pi - 2EA)$] coïncide donc avec le point $P[(R_1), E, |EA_1, k\pi - 2EA]$ (§ 405). Le point $P[(R_1), E, |EA_1, k\pi - 2EA]$ a donc mêmes coordonnées que E, ce qui est impossible (§ 413). D n'est donc pas sur a. A est donc entre D et A_1.

Appelons a' la semi-droite déterminée dans (R_n) par la semi-droite a de (R_1). Le point $P[(R_n), A, a', k\pi]$ coïncide avec le point $P[(R_1), A, a, k\pi]$ (§ 404), c. à d. avec A. a' est la semi-droite opposée à la semi-droite $|AA_n$ de (R_n). $P[(R_n), A, a', k\pi]$ coïncide donc avec $P[(R_1), A, a, 2k\pi]$ et $P[(R_1), A, a, 2k\pi]$ coïncide avec A. On montre aisément qu'il en est de même pour $P[(R_1), A, a, m]$ lorsque m est un multiple quelconque de $k\pi$.

C. q. f. d.

415. Théorème. *Supposons donnés une région normale* (R_1), *un point* A *de* (R_1) *et deux semi-droites* a *et* a'_1 *de* (R_1) *issues de* A. *Les points* $P[(R_1), A, a, k\pi]$ *et* $P[(R_1), A, a'_1, k\pi]$ *coïncident.*

Démonstration. Soit α un plan de (R_1) contenant a et a'_1 et soit α' celle des deux moitiés en lesquelles le support de a partage α qui contient a'_1 (si a'_1 est opposé à a nous prenons pour α' l'une quelconque des deux moitiés du plan α).

Désignons les points $P[(R_1), A, a, k\pi]$ et $P[(R_1), A, a'_1, k\pi]$ respectivement par B et par B'_1.

Désignons par (R_2), ..., (R_n) et par A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n une suite de régions normales et une suite de points permettant de passer de A à B et jouissant des mêmes propriétés que les suites désignées par les mêmes notations dans le § 414, avec la seule différence qu'ici nous ne faisons aucune hypothèse relativement à la question de savoir si B coïncide avec A ou non.

Posons $\theta_1 = (a, a'_1)$. Si $\theta_1 = 0$, le théorème est établi. Supposons $\theta_1 \neq 0$. On a $0 < \theta_1 < \pi$. Soit θ un nombre quelconque satisfaisant à $0 < \theta < \theta_1$. Soit a' la semi-droite de (R_1) issue de A et située dans α' telle que $(a, a') = \theta$. Désignons par B' le point $P[(R_1), A, a', k\pi]$.

Nous pouvons trouver une suite de points fixes C_1, C_2, ..., C_{n-1}, C_n, C jouissant des propriétés suivantes : A, C_1 et C_2 appartiennent à (R_1), C_1 et C_2 sont dans α mais

non sur la droite AA_2 de R_1; C_1, C_2, C_3 sont dans (R_2) et y sont situés dans un même plan avec A_1A_3, mais C_3 n'est pas sur A_1A_3; C_2, C_3, C_4 sont dans (R_3) et y sont situés dans un même plan avec A_2A_4, mais C_4 n'est pas sur A_2A_4; ...; C_{n-1}, C_n, C sont dans (R_n) et y sont situés dans un même plan avec $A_{n-1}B$, mais C n'est pas sur $A_{n-1}B$.

Etudions maintenant les propriétés de a' pour les valeurs suffisamment petites de θ. Plaçons-nous d'abord dans (R_1). Si θ est assez petit, a' coupera certainement A_1C_1 et A_2C_2; soient A'_1 et A'_2 les points d'intersection. Si θ est assez peitit, A'_1 sera entre A et A'_2 et $A_1A'_1$ et $A_2A'_2$ tendent vers zéro lorsque θ tend vers zéro.

Plaçons-nous en second lieu dans (R_2). Si θ est assez petit, $A_1A'_1$ et $A_2A'_2$ restent arbitrairement petits, A'_1 et A'_2 sont dans (R_2), $A'_1A'_2$ coupe A_3C_3 en A'_3, A'_2 est entre A'_1 et A'_3 et $\lim\limits_{\theta \gtrless 0} A_3A'_3 = 0$.

En continuant à raisonner ainsi on arrive finalement au résultat que voici : si θ est assez petit, il existe une suite de points A'_1, A'_2, A'_3, ..., A'_{n-1}, A'_n et C' jouissant des propriétés suivantes : A, A'_1, A'_2 appartiennent à (R_1), sont distincts et situés en ligne droite, A'_1 étant entre A et A'_2; A'_1, A'_2, A'_3 appartiennent à (R_2), sont distincts et situés en ligne droite, A'_2 étant entre A'_1 et A'_3; ...; A'_{n-1}, A'_n, C' appartiennent à (R_n), sont distincts et situés en ligne droite, A'_n étant entre A'_{n-1} et C'; dans (R_1), A'_1 est sur A_1C_1; dans (R_2), A'_2 est sur A_2C_2; ...; dans (R_n), A'_n est sur A_nC_n et C' est sur BC; dans (R_1), $|AA'_1$ et a' coïncident; enfin on a lorsque θ tend vers zéro

$$\lim A_1A'_1 = \lim A_2A'_2 = \cdots = \lim A_nA'_n = \lim BC' = 0.$$

On en déduit aisément que

$$\lim_{\theta \gtrless 0} (AA'_1 + A'_1A'_2 + \cdots + A'_{n-1}A'_n) = AA_1 + \cdots + A_{n-1}A_n,$$

$$\lim_{\theta \gtrless 0} A'_nC' = A_nB.$$

Si θ est assez petit, on peut donc trouver dans (R_n) sur $|A'_nC'$ un point B'' tel que

$$A'_nB'' = AA_1 + \cdots + A_{n-1}A_n + A_nB \\ - (AA'_1 + A'_1A'_2 + \cdots + A'_{n-1}A'_n).$$

Il est clair que B'' n'est autre que le point $P[(R_1), A, a', k\pi]$ ou B'.

Si donc θ est assez petit, B' se trouve dans (R_n) ; or, B' et B ont les mêmes coordonnées que A par rapport à tout système d'axes coordonnés rectangulaires (§ 413); B' et B coïncident donc pourvu que θ soit assez petit (§ 410).

Supposons maintenant que B'_1 soit distinct de B. Divisons toutes les valeurs de θ satisfaisant à $0 < \theta < \theta_1$ en deux classes, la première classe comprenant 0 et toutes les valeurs θ' de θ telles que pour $0 < \theta < \theta'$ B' coïncide avec B, la seconde classe comprenant les valeurs de θ n'appartenant pas à la première. D'après ce qui précède il existe des valeurs non nulles de θ appartenant à la première classe. θ_1 appartient à la seconde classe. Il est clair qu'il existe un nombre θ_2 satisfaisant à $0 < \theta_2 < \theta_1$ tel que les nombres θ inférieurs à θ_2 appartiennent à la première classe et ceux éventuellement supérieurs à θ_2 à la seconde. θ_2 n'appartient pas à la première classe, car alors les valeurs de θ supérieures à θ_2 assez voisines de θ_2 y appartiendraient aussi. θ_2 appartient donc à la seconde classe. Soit B'_2 la position de B' pour $\theta = \theta_2$; B'_2 est distinct de B. On montre en raisonnant exactement comme nous l'avons fait plus haut que B' coïncide avec B'_2 pour les valeurs de θ inférieures à θ_2 suffisamment voisines de θ_2. Or, pour ces valeurs B' coïncide avec B. Nous arrivons ainsi à une contradiction. L'hypothèse que B'_1 est distinct de B doit donc être rejetée et B'_1 coïncide avec B. C. q. f. d.

416. Théorème. *Supposons donnés une région normale* (R_1), *un point* A *de* (R_1) *et une semi-droite* a *de* (R_1) *issue de* A. *Si le point* $P[(R_1), A, a, k\pi]$ *est distinct de* A, *le point* $P[(R_1), A, a, n_1 k\pi]$ *coïncide avec* A *lorsque* n_1 *est un nombre entier positif pair et coïncide avec* $P[(R_1), A, a, k\pi]$ *lorsque* n_1 *est un nombre entier positif impair.*

Démonstration. Soit a' la semi-droite de (R_1) opposée à a. Désignons par B le point $P[(R_1), A, a, k\pi]$. Par hypothèse B est distinct de A. Le point $P[(R_1), A, a', k\pi]$ coïncide avec B (§ 415).

Désignons par (R_2), ..., (R_n) et par A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n une suite de régions normales et une suite de points jouissant des propriétés suivantes : (R_1) et (R_2), (R_2) et (R_3), ..., (R_{n-1}) et (R_n) ont au moins un point commun; A, A_1, A_2 appartiennent à (R_1) et sont distincts et situés en ligne droite, A_1 étant entre A et A_2; ...; A_{n-1}, A_n, B appartiennent à (R_n) et sont distincts et situés en ligne droite, A_n étant entre A_{n-1} et B; la semi-droite $|AA_1$ de (R_1) coïncide avec a; on a $AA_1 + \cdots + A_nB = k\pi$.

Désignons par (R'_2), ..., (R'_m) et par A'_1, A'_2, ..., A'_{m-1}, A'_m une suite de régions normales et une suite de points analogues aux précédentes avec cette différence que la semi-droite $|AA'_1$ de (R_1) coïncide avec a'.

Soit D un point situé entre A'_m et B, appartenant à (R_n) et tel que $BD < BA_n$. On voit aisément par des raisonnements analogues à ceux que nous avons faits au § 414 que dans (R_n) les points D, B et A_n sont en ligne droite. Soient C et C′ deux points situés respectivement entre A et A_1 et entre A et A'_1 tels que $AC = AC'$. Si D était entre B et A_n, le point C serait identique au point $P[(R_n), B, |BD, k\pi - AC]$, lequel est identique au point $P[(R'_m), B, |BD, k\pi - AC]$, qui est identique à C′, ce qui est impossible; B est donc entre D et A_n.

A est identique au point $P[(R_n), B, |BD, k\pi]$ (§ 405), lequel est identique au point $P[(R_1), A, a, 2k\pi]$ (§ 405).

Le théorème est donc établi lorsque le nombre n_1 relatif à $P[(R_1), A, a, n_1k\pi]$ est égal à 1 ou à 2. Il s'établit ensuite sans la moindre difficulté pour toute autre valeur entière et positive de n_1.

417. Théorème. *Il existe au plus un point équivalent à un point donné.*

Démonstration. Supposons donnés un point A, un point B équivalent à A et un point B′ aussi équivalent à A. Je dis que B et B′ coïncident ; en effet.

Appliquons le postulat IV du § 400 aux points A et B ; soient (R_1), (R_2), ..., (R_n) et A_1, A_2, ..., A_n une suite de régions normales et une suite de points jouissant des propriétés énumérées dans ce postulat. Appliquons le

même postulat aux points A et B′ et soient (R'_1), (R'_2), ..., (R'_m) et A'_1, A'_2, ..., A'_m deux suites analogues aux précédentes relatives à A et B′. Nous pouvons d'ailleurs aisément choisir les points A'_1, A'_2, ..., A'_m de manière que l'on puisse prendre comme région (R'_1) la région (R_1).

Soient a la semi-droite $|AA_1$ de (R_1) et a' la semi-droite $|AA'_1$ de (R_1). Posons

$$m_1 = AA_1 + A_1A_2 + ... + A_nB,$$
$$m'_1 = AA'_1 + A'_1A'_2 + ... + A'_mB'.$$

B n'est autre que le point $P[(R_1), A, a, m_1]$ et B′ est le point $P[(R_1), A, a', m'_1]$.

m_1 est de la forme $n_1k\pi$ et m'_1 de la forme $n'_1k\pi$, n_1 et n'_1 étant des nombres entiers et positifs (§ 413). Si $P[(R_1), A, a, k\pi]$ coïncidait avec A, $P[(R_1), A, a, n_1k\pi]$ coïnciderait avec A (§ 414) et B ne serait pas équivalent à A. $P[(R_1), A, a, k\pi)$ est donc distinct de A ; il en est de même de $P[(R_1), A, a', k\pi]$. Il en résulte que n_1 et n'_1 sont impairs (§ 416). B coïncide donc avec $P[(R_1), A, a, k\pi]$ et B′ avec $P[(R_1), A, a', k\pi]$ (§ 416). B et B′ coïncident donc entre eux (§ 415).

C. q. f. d.

418. Théorème. *Si un point a un équivalent, tout point a un équivalent.*

Démonstration. Supposons que le point A ait un équivalent A′. Soit B un point quelconque. Je dis que B a un équivalent; en effet.

Appliquons le postulat IV du § 400 aux points A et B; soient (R_1), (R_2), ..., (R_n) et A_1, A_2, ..., A_n une suite de régions normales et une suite de points jouissant des propriétés énumérées dans ce postulat. Posons

$$m = AA_1 + A_1A_2 + \cdots + A_nB.$$

D'après ce que nous avons vu au § 417, A′ coïncide avec $P[(R_1), A, |AA_1, k\pi]$. B n'est autre que le point $P[(R_1), A, |AA_1, m]$. Nous pouvons supposer $m < 2k\pi$ puisque sinon nous pourrions rendre m inférieur à $2k\pi$ en retranchant un multiple de $2k\pi$ convenable.

Si $m = k\pi$, B coïncide avec A′ et A est l'équivalent de B.

Supposons $m < k\pi$. Désignons par B′ le point $P[(R_1), A, |AA_1, m + k\pi]$. B′ a mêmes coordonnées que B. Si B′ coïncidait avec B, les points $P[(R_1), A, |AA_1, m + (k\pi - m)]$ et $P[(R_1), A, |AA_1, (m + k\pi) + (k\pi - m)]$ coïncideraient, c. à d. que A et A′ coïncideraient. B′ est donc distinct de B et par conséquent équivalent à B.

Supposons $m > k\pi$. Alors on montre en raisonnant comme dans le cas précédent que $P[(R_1), A, |AA_1, m - k\pi]$ est équivalent à B.

B a donc dans tous les cas un équivalent.

C. q. f. d.

419. Par les §§ 417 et 418 nous sommes amenés à considérer les deux hypothèses suivantes.

Hypothèse I. *Il existe au moins un point qui a un équivalent.*

Hypothèse II. *Il n'existe aucun point qui ait un équivalent.*

Ces deux hypothèses s'excluent mutuellement et l'une des deux est nécessairement vraie. Nous allons maintenant établir qu'elles sont toutes les deux compatibles avec les postulats de la géométrie elliptique.

420. Théorème. *L'hypothèse* I *du* § 419 *est compatible avec les postulats de la géométrie elliptique.*

Démonstration. Revenons au système d'objets existant dans l'espace euclidien à quatre dimensions et satisfaisant aux postulats de la géométrie elliptique considéré au § 401. Je dis que ce système d'objets satisfait à l'hypothèse I du § 419. En effet.

Soit (UV) le segment elliptique qui a été pris comme unité de longueur elliptique et soit O l'origine des coordonnées dans l'espace à quatre dimensions. Soit k' le nombre qui relativement au système d'objets du § 401 joue le même rôle que le paramètre k de la géométrie elliptique. En nous plaçant dans la région normale (R) qui contient (UV), nous trouvons d'après ce qui a été vu au § 342 que k' est égal à l'inverse de la valeur de l'angle $\sphericalangle$ UOV dans l'espace à quatre dimensions. Nous avons donc

$$k' = \frac{1}{\sphericalangle \mathrm{UOV}}.$$

Désignons par U′ le point elliptique P[(R), U, |UV, m], m satisfaisant à $0 < m < \frac{\pi}{\sphericalangle \mathrm{UOV}}$, et soit W la position de U′ répondant à $m = \frac{\pi}{\sphericalangle \mathrm{UOV}}$. Lorsque m croît de 0 à $\frac{\pi}{\sphericalangle \mathrm{UOV}}$, nous savons d'après le § 401 que la semi-droite |OU′ décrit dans l'espace à quatre dimensions dans un certain plan un angle θ qui satisfait à

$$\frac{\theta}{\sphericalangle \mathrm{UOV}} = \left\{ \begin{array}{c} \text{mesure elliptique du chemin décrit} \\ \text{par le point elliptique U}' \end{array} \right\} = \frac{\pi}{\sphericalangle \mathrm{UOV}}.$$

Nous avons donc $\theta = \pi$ et de là résulte que le point elliptique W est distinct du point U. Or, W a mêmes coordonnées elliptiques que U (§ 413). W est donc équivalent à U et l'hypothèse I du § 419 est vraie. Cette hypothèse est donc compatible avec les postulats de la géométrie elliptique. C. q. f. d.

Remarquons que les coordonnées de W dans l'espace à quatre dimensions sont égales à celles de U multipliées par — 1.

421. Théorème. *L'hypothèse* II *du* § 419 *est compatible avec les postulats de la géométrie elliptique.*

Démonstration. Nous allons d'abord exposer différents lemmes. Les trois premiers de ces lemmes constituent des théorèmes de la géométrie elliptique, indépendants de tout système d'objets fournissant une image de cette géométrie.

Lemme I. *Si* ABC *est un triangle situé dans une région normale, si les mesures de ses trois côtés sont inférieures à* $k\frac{\pi}{2}$ *et si* D *est un point situé entre* A *et* C, DB *est inférieur à l'un au moins des nombres* AB *et* CB.

Démonstration. Supposons $DB \geqslant AB$ et $DB \geqslant CB$. Si pour l'un des nombres AB ou CB on a le signe =, on voit immédiatement qu'il existe entre A et C un point P tel que PB est perpendiculaire à AC. Si l'on a $DB > AB$ et $DB > CB$, il existe un nombre m satisfaisant à $AB < m$

$< DB$ et $CB < m < DB$. Il existe un point A′ entre A et D tel que $A'B = m$ et un point C′ entre C et D tel que $C'B = m$; de nouveau il existe un point P entre A et C tel que PB est perpendiculaire à AC. D est entre A et P ou entre C et P ou coïncide avec P ; supposons par exemple D entre A et P ou coïncidant avec P. Si l'on avait $AB > PB$, on aurait $DB > AB > PB$, il y aurait un point A′ entre D et P tel que $A'B = AB$ et il y aurait un point P′ entre A et A′ tel que P′B est perpendiculaire à AC ; alors on aurait $AB = k\frac{\pi}{2}$, ce qui est exclu ; on a donc $AB < PB$. ∢ PAB est donc obtus ; il existe un point E entre P et B tel que ∢ EAP est droit ; on a $AE = PE = k\frac{\pi}{2}$. On a $AP < AE$, ∢ AEP est aigu, ∢ AEB est obtus ; on a $AB < AE$, ∢ ABE est obtus. Il y a un point Q entre E et B tel que AQ est perpendiculaire à EB. On a donc $AP = AB = k\frac{\pi}{2}$, ce qui est exclu. Nous arrivons ainsi à une absurdité et le lemme est établi.

Lemme II. *Si* A, B, C, D *sont quatre points appartenant à une même région normale* (R) *et non situés dans un même plan, les points de* (R) *intérieurs au tétraèdre* ABCD, *les portions des droites et des plans de* (R) *intérieures au tétraèdre, les relations d'ordre entre les points d'une droite de* (R) *intérieurs au tétraèdre, les relations de congruence entre les segments de* (R) *intérieurs au tétraèdre et les relations de congruence entre les angles de* (R) *dont le sommet est intérieur au tétraèdre satisfont à tous les postulats de la géométrie générale et à l'hypothèse de l'angle obtus.*

Nous dirons plus brièvement que la sub-région de (R) constituée par les points intérieurs au tétraèdre satisfait aux postulats de la géométrie générale et à l'hypothèse de l'angle obtus.

Lemme III. *Si* ABCD *et* A′B′C′D′ *sont deux tétraèdres appartenant à une même région normale* (R), *et s'il existe un point de* (R) *intérieur à la fois aux deux tétraèdres, la sub-région de* (R) *constituée par tous les points intérieurs à la fois aux deux tétraèdres satisfait aux postulats de la géométrie générale et à l'hypothèse de l'angle obtus.*

Revenons maintenant au système d'objets existant dans l'espace euclidien à quatre dimensions dont nous nous sommes occupés au § 401.

Désignons par θ_0 un nombre fixe satisfaisant à $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ tel que $\sin \theta_0 < \frac{1}{2}$. Désignons toujours par O l'origine des coordonnées dans l'espace euclidien à quatre dimensions.

LEMME IV. *Soient* A *un point elliptique quelconque et* (E) *l'ensemble des points elliptiques* B *tels que l'angle* $\sphericalangle$ BOA *de l'espace à quatre dimensions satisfasse à*

$$\sphericalangle \text{BOA} \leqslant \theta_0.$$

Parmi les huit régions normales considérées au § 401 *il y en a au moins une contenant tous les points de* (E).

DÉMONSTRATION. Supposons le lemme faux. Soient a_1, a_2, a_3, a_4 les coordonnées de A dans l'espace à quatre dimensions. On a $a_1 > 0$, $a_1 = 0$ ou $a_1 < 0$. Supposons d'abord $a_1 > 0$. Alors A appartient à la région normale $x_1 > 0$. Désignons par S le point elliptique dont les coordonnées dans l'espace à quatre dimensions sont r, 0, 0, 0. D'après l'hypothèse que nous venons de faire tous les points de (E) n'appartiennent pas à la région $x_1 > 0$. Supposons $a_1 \geqslant \frac{r}{2}$. Soit B un point elliptique quelconque de (E). Considérons un hyperplan α passant par O, A, B et S. Transformons cet hyperplan dans l'hyperplan $x_4 = 0$ par une transformation linéaire orthogonale laissant l'origine des coordonnées invariante et faisons correspondre à tout point $x_1, x_2, x_3, 0$ de l'hyperplan $x_4 = 0$ le point de l'espace euclidien à trois dimensions ayant comme coordonnées x_1, x_2, x_3 par rapport à un système de trois axes coordonnés rectangulaires $O_1X_1X_2X_3$. Aux points elliptiques de α correspondent les points d'une sphère (Q) de centre O_1 et de rayon r. Aux points elliptiques de α situés dans la région $x_1 > 0$ correspondent les points d'une moitié (Q_1) de (Q), les points du grand cercle (C) qui limite (Q_1) étant exclus. A S correspond le pôle S′ de (C) situé sur (Q_1); à A correspond un point A′ de (Q_1) et à B un point B′ de (Q). Soit D′ un point de (C) tel que A′ appartienne à l'arc

de grand cercle $S'D'$. Abaissons de A' la perpendiculaire sur O_1D' et soit F' son pied; F' appartient évidemment au segment (O_1D'). Dans l'espace à quatre dimensions la distance de A au point $F(0, a_2, a_3, a_4)$ est a_1. F appartient à α. Aux points de α situés dans l'hyperplan $x_1 = 0$ répondent après la transformation, dans l'espace à trois dimensions, les points du plan de (C). Le point F'' qui répond à F est donc dans le plan de (C). On voit aisément que F est dans le plan de l'espace à quatre dimensions déterminé par O, S et A. F'' est donc dans le plan de O_1, S' et A'. F'' est donc sur la droite O_1D'. On a

$$(OA)^2 = (OF)^2 + (FA)^2,$$
$$(O_1A')^2 = (O_1F'')^2 + (F''A')^2.$$

F'' coïncide donc avec F' et l'on a $A'F' = AF = a_1$. Comme nous avons supposé $a_1 \geqslant \frac{r}{2}$, nous avons $\sphericalangle A'O_1D' > \theta_0$. Comme $\sphericalangle A'O_1B' \leqslant \theta_0$, B' appartient à (Q_1) et B appartient à la région $x_1 > 0$. Tous les points de (E) appartiennent donc à $x_1 > 0$, ce que nous avons supposé ne pas être le cas. Cette contradiction provient de ce que nous avons supposé $a_1 \geqslant \frac{r}{2}$. Nous avons donc $a_1 < \frac{r}{2}$ ou encora $|a_1| < \frac{r}{2}$. Lorsque $a_1 = 0$, on a de ce fait même $|a_1| < \frac{r}{2}$ et lorsque $a_1 < 0$ on trouve de la même façon que tantôt $|a_1| < \frac{r}{2}$. On a de même

$$|a_2| < \frac{r}{2}, \quad |a_3| < \frac{r}{2}, \quad |a_4| < \frac{r}{2}.$$

On ne peut donc avoir

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = r^2.$$

Nous arrivons ainsi à une absurdité et de là il résulte qu'il existe une région normale au moins contenant tous les points de (E).

C. q. f. d.

Considérons maintenant quatre points elliptiques A, B,

C, D non situés dans un même hyperplan avec O et tels que

$$\sphericalangle AOB < \theta_0,\ \sphericalangle AOC < \theta_0,\ \sphericalangle AOD < \theta_0,\ \sphericalangle BOC < \theta_0,$$
$$\sphericalangle BOD < \theta_0,\ \sphericalangle COD < \theta_0.$$

D'après le lemme IV il existe au moins une région normale contenant ces quatre points. Dans cette région normale les quatre points ne sont pas dans un même plan elliptique et forment un tétraèdre. Nous dirons pour abréger le langage que les points elliptiques intérieurs à ce tétraèdre constituent une *région normale de seconde espèce*. Il est clair que si le tétraèdre ABCD appartient simultanément à plusieurs régions normales, la région normale de seconde espèce qui y répond est la même, quelque soit la région normale à laquelle il est considéré appartenir.

Lemme V. *Étant données deux régions normales de seconde espèce ayant au moins un point commun, il existe une région normale contenant à la fois les deux régions normales de seconde espèce données.*

Démonstration. Soient ABCD le tétraèdre définissant la première région normale de seconde espèce et A′B′C′D′ le tétraèdre définissant la seconde et soit M un point elliptique commun aux deux régions normales de seconde espèce. Plaçons-nous dans une région normale qui contient ABCD. M appartient aussi à cette région normale et y est intérieur à ABCD. On a

$$\sphericalangle AOB < \frac{\pi}{2},\ \sphericalangle AOC < \frac{\pi}{2},\ \sphericalangle AOD < \frac{\pi}{2},\ \sphericalangle BOC < \frac{\pi}{2},$$
$$\sphericalangle BOD < \frac{\pi}{2},\ \sphericalangle COD < \frac{\pi}{2}.$$

Si nous attribuons à k' la même signification que dans le § 420 et si nous désignons la mesure elliptique d'un segment elliptique quelconque (PQ) par PQ, nous pourrons écrire

$$AB < k'\frac{\pi}{2},\ AC < k'\frac{\pi}{2},\ AD < k'\frac{\pi}{2},\ BC < k'\frac{\pi}{2},$$
$$BD < k'\frac{\pi}{2},\ CD < k'\frac{\pi}{2}.$$

D'après le lemme I, chacun des nombres MA, MB, MC, MD est donc surpassé par un des nombres AB, AC, AD, BC, BD, CD. Nous avons donc

$$\sphericalangle MOA < \theta_0, \quad \sphericalangle MOB < \theta_0, \quad \sphericalangle MOC < \theta_0, \quad \sphericalangle MOD < \theta_0.$$

De même

$$\sphericalangle MOA' < \theta_0, \quad \sphericalangle MOB' < \theta_0, \quad \sphericalangle MOC' < \theta_0, \quad \sphericalangle MOD' < \theta_0.$$

D'après le lemme IV il existe donc une région normale contenant A, B, C, D, A′, B′, C′, D′ et contenant par conséquent les deux régions normales de seconde espèce données. C. q. f. d.

Maintenant nous pouvons aborder la démonstration proprement dite de notre théorème.

Appelons *pseudo-point* un couple de points elliptiques équivalents. Observons que deux points elliptiques sont équivalents lorsque les coordonnées de l'un dans l'espace à quatre dimensions sont égales aux coordonnées de l'autre dans le même espace changées de signe, et réciproquement (§ 420).

Appelons *région pseudo-normale* tout ensemble de pseudo-points jouissant de la propriété suivante : pour chaque pseudo-point de l'ensemble on peut choisir un des deux points elliptiques dont il consiste de telle manière que l'ensemble des points elliptiques ainsi obtenus constitue une région normale de seconde espèce.

Supposons donnée une région pseudo-normale (R). D'après la définition que nous venons de donner il existe une région normale de seconde espèce (R_2) telle que l'ensemble des pseudo-points obtenus en associant à chaque point elliptique de (R_2) le point elliptique équivalent soit identique à (R). Soit ABCD le tétraèdre définissant (R_2). Soient A′, B′, C′, D′ les points elliptiques équivalents respectivement à A, B, C, D. Si par exemple $x_1 > 0$ est la région normale contenant A, B, C, D, alors $x_1 < 0$ contient A′, B′, C′, D′. A′, B′, C′, D′ sont donc toujours situés dans une même région normale. On voit aisément que A′, B′, C′, D′ forment un tétraèdre et que les points intérieurs à

ce tétraèdre constituent une région normale de seconde espèce; soit (R'_2) cette région. (R_2) et (R'_2) n'ont aucun point commun. Soit M un point elliptique et M' son équivalent; si M appartient à (R_2), M' appartient à (R'_2) et réciproquement. (R) est donc encore l'ensemble des pseudo-points obtenus en associant à chaque point elliptique intérieur à (R'_2) le point elliptique équivalent. Supposons maintenant qu'une région normale de seconde espèce (R'''_2) jouisse de la propriété que l'ensemble des pseudo-points répondant aux différents points elliptiques de (R'''_2) est identique à (R). Un point elliptique de (R'''_2) appartient à (R_2) ou à (R'_2); supposons qu'il appartienne à (R_2). (R_2) et (R'''_2) ont alors un point commun. Il existe une région normale contenant à la fois (R_2) et (R'''_2) (lemme V) et aucun point de (R'_2) n'appartient à cette région normale. Tout point de (R'''_2) appartient donc à (R_2). De même, tout point de (R_2) appartient à (R'''_2). (R_2) et (R'''_2) sont identiques. Il en résulte qu'étant donné (R), le couple de régions normales (R_2) et (R'_2) est le seul qui jouisse de la propriété que (R) est l'ensemble des pseudo-points répondant aux différents points elliptiques de (R_2) ou de (R'_2).

Désignons par (R_1) une région normale qui contient (R_2) et par (R'_1) une région normale contenant (R'_2). Si entre des points elliptiques, des segments elliptiques ou des angles elliptiques de (R_1) appartenant à (R_2) existent des relations exprimées par les mots « situés sur une droite elliptique », « situés dans un même plan elliptique », « situé entre », « congruent », les mêmes relations existeront entre les points elliptiques, segments elliptiques et angles elliptiques de (R'_1) appartenant à (R'_2) obtenus en faisant correspondre à chaque point elliptique de (R_2) le point elliptique équivalent.

Si maintenant nous nous plaçons dans la région pseudo-normale (R), nous pouvons définir avec la plus grande facilité la *pseudo-droite*, le *pseudo-plan*, la relation de *situé entre* entre les pseudo-points d'une pseudo-droite, le *pseudo-segment*, le *pseudo-angle* et les relations de *congruence*

entre pseudo-segments et entre pseudo-angles en considérant (R_2) ou (R'_2). Ces définitions s'indiquent d'elles-mêmes et il est inutile que nous les exposions en détail.

Maintenant nous allons établir que les pseudo-points et leurs relations satisfont aux postulats de la géométrie elliptique et à l'hypothèse II du § 419.

On constate immédiatement que le postulat I du § 400 est valable.

La validité du postulat II du § 400 résulte du fait qu'étant donné un point elliptique A appartenant à une région normale (R), on peut toujours trouver une région normale de seconde espèce appartenant à (R) et contenant A.

La validité du postulat III du § 400 se déduit aisément du lemme II du § 421.

Passons au postulat IV du § 400. Soient A et B deux pseudo-points. Soient A' l'un des points elliptiques dont A consiste et B' l'un des points elliptiques dont B consiste. Nous pouvons passer de A' à B' par une suite de régions normales (R_1), (R_2), ..., (R_n) et une suite de points elliptiques $A_1, A_2, ..., A_n$ satisfaisant aux conditions du postulat IV du § 400 appliqué aux points elliptiques (§ 401). En nous plaçant successivement dans (R_1), (R_2), ..., (R_n), nous pouvons aisément trouver une suite de régions normales de seconde espèce (R'_1), (R'_2), ..., (R'_m) et une suite de points elliptiques A'_1, A'_2, A'_3, ..., A'_m satisfaisant aux conditions suivantes : (R'_1) et (R'_2), ..., (R'_{m-1}) et (R'_m) ont au moins un point commun ; A', A'_1, A'_2 appartiennent à (R'_1) et sont distincts ; si l'on se place dans une région normale contenant (R'_1), A', A'_1 et A'_2 sont en ligne droite, A'_1 étant entre A' et A'_2; A'_1, A'_2 et A'_3 jouissent de propriétés analogues, etc. Enfin A'_{m-1}, A'_m et B' appartiennent à (R'_m) et sont distincts ; si l'on se place dans une région normale contenant (R'_m), A'_{m-1}, A'_m et B' sont en ligne droite, A'_m étant entre A'_{m-1} et B'. On constate maintenant immédiatement que la suite de régions pseudo-normales répondant à (R'_1), (R'_2), ..., (R'_m) et la suite de pseudo-points répondant à A'_1, A'_2, ..., A'_m satisfont vis à vis des pseudo-points A

et B à toutes les conditions du postulat IV, dont la validité est ainsi établie.

La validité des postulats V—X du § 400 s'établit aisément au moyen des lemmes V et III du § 421.

La validité des postulats XI et XII du § 400 se déduit encore sans la moindre difficulté du fait que ces postulats sont valables pour les points elliptiques.

Soient maintenant (R) une région pseudo-normale, A et B deux pseudo-points distincts de (R). Soit (R_2) l'une des deux régions normales de seconde espèce répondant à (R) et soient A_1 et B_1 ceux des points elliptiques dont A et B consistent qui sont situés dans (R_2). Soit (R_1) une région normale contenant (R_2). Désignons par A' le pseudo-point répondant au point elliptique $P[(R_1), A_1, | A_1B_1, k'\pi]$, k' étant le nombre qui vis-à-vis des points elliptiques joue le même rôle que le paramètre k dans la géométrie elliptique. A' est identique au pseudo-point $P[(R), A, | AB, k'\pi]$. Or, le point elliptique $P[(R_1), A_1, | A_1B_1, k'\pi]$ est équivalent au point elliptique A_1. Donc A est identique à A'. Comme k' joue aussi vis-à-vis des pseudo-points le même rôle que le paramètre k dans la géométrie elliptique [pourvu que l'on prenne comme unité de longueur elliptique un segment elliptique (UV) situé dans une région normale de seconde espèce et comme pseudo-unité de longueur le pseudo-segment dont les extrémités sont obtenues en associant à U et à V le point elliptique équivalent], l'identité de A et de $P[(R), A, | AB, k'\pi]$ prouve que c'est l'hypothèse II du § 419 qui est valable pour les pseudo-points.

Nous sommes donc parvenus à construire un système d'objets répondant aux concepts fondamentaux de la géométrie elliptique, existant dans l'espace euclidien à quatre dimensions, et satisfaisant aux postulats de la géométrie elliptique et à l'hypothèse II du § 419. Cette hypothèse est donc compatible avec les postulats de la géométrie elliptique.

C. q. f. d.

422. Définitions. D'après les §§ 420 et 421 il répond à

chacune des hypothèses du § 419 une branche de la géométrie elliptique et dans chacune de ces branches on peut pousser les développements aussi loin que l'on veut sans jamais arriver à une contradiction. La branche de la géométrie elliptique basée sur l'hypothèse I du § 419 est appelée *géométrie sphérique* et la branche basée sur l'hypothèse II du même paragraphe est appelée *géométrie elliptique proprement dite.*

Nous allons maintenant continuer l'étude de la géométrie elliptique en traitant simultanément les deux branches.

423. Définition. Supposons donnée une région normale (R_1) et une droite a_1 de (R_1). Considérons l'ensemble de points (E) constitué par tous les points A tels qu'il existe un nombre fini de régions normales (R_2), (R_3), ..., (R_n) jouissant des propriétés suivantes : (R_1) et (R_2), (R_2) et (R_3), ..., (R_{n-1}) et (R_n) ont au moins un point commun ; il y a au moins un point de a_1 situé dans (R_1) (R_2); si a_2 est la droite définie par a_1 dans (R_2), il existe au moins un point de a_2 appartenant à (R_2) (R_3); ...; si a_{n-1} est la droite définie par a_{n-2} dans (R_{n-1}), il existe au moins un point de a_{n-1} dans (R_n); enfin A appartient à la droite a_n définie dans (R_n) par a_{n-1}. Nous appellerons *droite* tout ensemble de points tel que (E).

424. Définition. Supposons que l'on donne une région normale (R_1) et un plan α_1 de (R_1). Considérons l'ensemble de points (E) constitué par tous les points A tel qu'il existe un nombre fini de régions normales (R_2), (R_3), ..., (R_n) jouissant des propriétés suivantes : (R_1) et (R_2), (R_2) et (R_3), .., (R_{n-1}) et (R_n) ont au moins un point commun ; il y a au moins un point de α_1 situé dans (R_1) (R_2) ; si α_2 est le plan défini par α_1 dans (R_2), il existe au moins un point de α_2 appartenant à (R_2) (R_3); ...; si α_{n-1} est le plan défini par α_{n-2} dans (R_{n-1}), il existe au moins un point de α_{n-1} appartenant à (R_n); enfin A appartient au plan α_n défini dans (R_n) par α_{n-1}. Nous appellerons *plan* tout ensemble de points tel que (E).

425. Théorème. *Supposons donnée une région normale* (R_1)

et une droite a_1 *de* (R_1). *Soit* (E) *la droite de l'espace définie par* (R_1) *et par* a_1 *de la façon exposée au* § 423. *Soient* A *un point de* a_1 *et* a'_1 *une des deux semi-droites de* (R_1) *définies par* A *sur* a_1. *Désignons par* B *le point* $P[(R_1), A, a'_1, 2k\pi]$ *ou le point* $P[(R_1), A, a'_1, k\pi)$ *suivant que nous admettons l'hypothèse* I *ou l'hypothèse* II *du* § 419 (B *coïncide avec* A). *Soient* (R_2), (R_3), ..., (R_n) *une suite de régions normales et* A_1, A_2, ..., A_n *une suite de points jouissant des propriétés suivantes:* (R_1) *et* (R_2), (R_2) *et* (R_3), ..., (R_{n-1}) *et* (R_n) *ont au moins un point commun ;* A, A_1 *et* A_2 *sont distincts, appartiennent à* (R_1) *et y sont en ligne droite,* A_1 *étant entre* A *et* A_2; ...; A_{n-1}, A_n *et* B *sont distincts, appartiennent à* (R_n) *et y sont en ligne droite,* A_n *étant entre* A_{n-1} *et* B ; *les semi-droites* a'_1 *et* $|AA_1$ *de* (R_1) *coïncident ; enfin on a*

$$AA_1 + A_1A_2 + \cdots + A_nB = \begin{cases} 2k\pi \text{ si l'on admet l'hypothèse I du § 419,} \\ k\pi \text{ si l'on admet l'hypothèse II du § 419.} \end{cases}$$

(E) *est identique à l'ensemble* (E′) *des points des segments* (AA_1), (A_1A_2), ..., (A_nB).

Démonstration. Il est clair que tout point de (E′) appartient à (E).

Montrons que tout point de (E) appartient à (E′). Soit C un point quelconque de (E). D'après le § 423 il existe un nombre fini de régions normales (R'_2), (R'_3), ..., (R'_m) jouissant des propriétés suivantes : (R_1) et (R'_2), (R'_2) et (R'_3), ..., (R'_{m-1}) et (R'_m) ont au moins un point commun ; il y a au moins un point de a_1 situé dans (R_1) (R'_2); si a_2 est la droite définie par a_1 dans (R'_2), il existe au moins un point de a_2 appartenant à (R'_3); ...; enfin C appartient à la droite a_m définie par a_{m-1} dans (R'_m).

Désignons par a''_1 la semi-droite de (R_1) opposée à a'_1. D'après ce qui a été vu aux §§ 416 et 414 les semi-droites déterminées dans (R_1) (R_n) par a''_1 et par la semi-droite $|BA_n$ de (R_n) sont identiques. Tout point $P[(R_1), A, a'_1, m_1]$ ou $P[(R_1), A, a''_1, m_1]$, m_1 étant un nombre positif quelconque, appartient donc à (E′). Tous les points de a_1 appartiennent ainsi à (E′).

Soit A'_1 un point de a_1 appartenant à (R_1) (R'_2). A'_1 est sur a'_1 ou sur a''_1; supposons par exemple A'_1 sur a'_1. On

peut trouver parmi les segments (AA_1), (A_1A_2), ..., (A_nB) un segment $(A_{r-1}A_r)$ contenant un point M distinct de A_{r-1} tel que $AA_1 + \cdots + A_{r-2}A_{r-1} + A_{r-1}M = AA'_1$. A'_1 et M sont alors identiques au point $P[(R_1), A, a'_1, AA'_1]$ et coïncident entre eux. Soit A''_1 un point de a_1 appartenant à $(R_1)(R'_2)$ situé entre A et A'_1 et tel que $A'_1A''_1 < A'_1A_{r-1}$. Il y a un point A'''_1 entre A_{r-1} et A'_1 tel que $A'_1A'''_1 = A'_1A''_1$. A'''_1 est identique au point $P[(R_1), A, a'_1, AA_1 + \cdots + A_{r-2}A_{r-1} + A_{r-1}A'_1 - A'_1A'''_1]$ ou $P[(R_1), A, a'_1, AA'_1 - A'A''_1]$, lequel est identique à A''_1. A'''_1 est donc identique à A''_1. Il en résulte que tous les points de a_2 appartiennent à (E'). On voit ainsi de proche en proche que tous les points de a_3, a_4, ..., a_m appartiennent à (E'). C appartient donc à (E').

(E) et (E') sont donc identiques. C. q. f. d.

Remarque. Soit m un nombre positif satisfaisant à $0 < m < 2\pi k$ ou $0 < m < k\pi$ suivant qu'on admet l'hypothèse I ou II du § 419. Le point $P[(R_1), A, a'_1, m]$ appartient à la droite (E). Lorsque m croît suivant le cas de 0 à $2k\pi$ ou à $k\pi$, on obtient tous les points de (E') et donc tous ceux de la droite (E); le point P parcourt les segments (AA_1), (A_1A_2), ..., (A_nA) et revient ainsi au point de départ. On voit aisément que les positions de P répondant à des valeurs distinctes de m différant de moins de $2k\pi$ ou de moins de $k\pi$ suivant le cas sont distinctes, en se basant sur le § 413 et en observant que deux points qui ont des coordonnées homogènes non proportionnelles par rapport à un même système d'axes rectangulaires sont distincts (§ 409). La droite nous apparaît ainsi comme une *ligne fermée sans points doubles*.

426. Théorème. *Si deux points sont équivalents, toute droite passant par l'un passe par l'autre.*

Démonstration. Soient A et A' deux points équivalents et a une droite passant par A. D'après le § 425 il existe une région normale (R) contenant A et une semi-droite a_1 de (R) issue de A telles que a est identique à l'ensemble des points distincts représentés par $P[(R), A, a_1, m]$, m prenant toutes les valeurs positives, zéro compris. Le

point P [(R), A, a_1, $k\pi$] appartient à a; si ce point coïncidait avec A, A n'aurait pas d'équivalent (§§ 413, 414 et 415). P [(R), A, a_1, $k\pi$] est donc distinct de A et par conséquent équivalent à A; ce point est identique à A′ (§ 417) et A′ est sur a. C. q. f. d.

427. Théorème. *Etant donnés une région normale* (R), *un système d'axes coordonnés rectangulaires* OXYZ *situé dans* (R) *et une droite de l'espace a, on peut trouver un système de deux équations*

$$(1) \qquad \begin{cases} a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0, \\ a'_0x_0 + a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 = 0 \end{cases}$$

jouissant des propriétés suivantes : on a

$$(2) \qquad \left\| \begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_0 & a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{matrix} \right\| \neq 0;$$

les coordonnées par rapport aux axes OXYZ *de tout point de a vérifient* (1); *tout point dont les coordonnées par rapport aux axes* OXYZ *vérifient* (1) *est sur a.*

Démonstration. Soit A un point de a situé dans une région normale (R_1). D'après le § 425, nous pouvons trouver un deuxième point B de a, distinct de A, et situé dans (R_1) tel que a soit identique à l'ensemble des points distincts représentés par P [(R_1), A, | AB, m] lorsque m prend toutes les valeurs positives, zéro compris.

Supposons d'abord les axes OXYZ situés dans (R_1). D'après ce qui a été vu au § 407 il existe un système de deux équations de la forme (1), telles que l'on a (2) et telles que les coordonnées de tout point de a vérifient (1). Soit maintenant M (x_0, x_1, x_2, x_3) un point dont les coordonnées vérifient (1). Soient x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 les coordonnées de A et x''_0, x''_1, x''_2, x''_3 celles de B. On voit comme au § 395 que les coordonnées de M sont de la forme

$$x_0 = px'_0 + qx''_0, \quad x_1 = px'_1 + qx''_1,$$
$$x_2 = px'_2 + qx''_2, \quad x_3 = px'_3 + qx''_3.$$

Si q était nul, M serait identique ou équivalent à A et

a passerait dans tous les cas par M (§ 426). Si $q \neq 0$, nous pouvons poser $\frac{p}{q} = \lambda_1$ et nous pouvons prendre comme coordonnées de M

$$\lambda_1 x'_0 + x''_0, \quad \lambda_1 x'_1 + x''_1, \quad \lambda_1 x'_2 + x''_2, \quad \lambda_1 x'_3 + x''_3.$$

Lorsque m satisfait à $0 < m < k\pi$, les coordonnées de P [(R$_1$), A, | AB, m] sont toujours de la forme

$$\lambda x'_0 + x''_0, \quad \lambda x'_1 + x''_1, \quad \lambda x'_2 + x''_2, \quad \lambda x'_3 + x''_3$$

et lorsque m croît de 0 à $k\pi$, λ varie continûment de $+\infty$ à $-\infty$ ou de $-\infty$ à $+\infty$ (§ 407). Il existe donc une valeur m_1 de m satisfaisant à $0 < m_1 < k\pi$ telle que pour cette valeur $\lambda = \lambda_1$. Le point P [(R$_1$), A, | AB, m_1] est sur a; il est identique ou équivalent à M et M est aussi sur a.

Lorsque les axes OXYZ ne sont pas situés dans (R$_1$), il suffit pour démontrer le théorème de faire appel au § 411.

428. Théorème. *Si un point d'une droite a de l'espace appartient à une région normale* (R), *l'ensemble des points communs à* (R) *et à a constitue une droite de* (R).

Démonstration. Ce théorème est une conséquence du § 427 et du § 394.

429. Théorème. *Si deux droites ont deux points non équivalents communs, elles coïncident.*

Démonstration. Ce théorème est une conséquence du § 427.

430. Théorème. *Si deux droites distinctes ont deux points distincts communs, ces deux points sont équivalents.*

Démonstration. Ce théorème est une conséquence du § 429.

431. Théorème. *Tout système de deux équations linéaires et homogènes distinctes à quatre inconnues rapporté à un système d'axes coordonnés rectangulaires représente une droite.*

Démonstration. On peut trouver deux systèmes de valeurs de x_0, x_1, x_2, x_3 non proportionnelles vérifiant les équations données. Ces deux systèmes de valeurs représentent deux points non équivalents (§ 407). Il existe une droite passant par ces deux points (§ 400, postulat IV).

Les équations représentant cette droite sont équivalentes aux équations données, qui représentent donc aussi une droite.

C. q. f. d.

432. Théorème. *Étant donnés une région normale* (R), *un système d'axes coordonnés rectangulaires* OXYZ *situé dans* (R) *et un plan de l'espace* α, *on peut trouver une équation*

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \tag{1}$$

où les a ne sont pas simultanément nuls telle que les coordonnées par rapport aux axes OXYZ *de tout point de* α *vérifient* (1) *et telle que tout point dont les coordonnées par rapport aux axes* OXYZ *vérifient* (1) *est situé dans* α.

Démonstration. Par définition il existe une région normale (R_1) et un plan α_1 de (R_1) tels que α est constitué par l'ensemble de points (E) relatif à (R_1) et à α_1 considéré au § 424.

On voit aisément au moyen des §§ 391 et 411 qu'un plan d'une région normale quelconque peut être représenté par une équation telle que (1) par rapport aux axes OXYZ. Soit (1) l'équation du plan α_1 de (R_1). Soit

$$a'_0x_0 + a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 = 0 \tag{2}$$

l'équation du plan α_2 de (R_2) (nous nous servons des mêmes notations qu'au § 424). Soit A_1 un point de α_1 situé dans (R_1)(R_2); A_1 est aussi situé dans α_2. Soient x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 les coordonnées de A_1. Si un système de valeurs de x_0, x_1, x_2, x_3 suffisamment voisines des x' vérifie (1), ce système de valeurs représente un point de (R_1)(R_2) appartenant à α_1, et donc aussi à α_2; ce système de valeurs vérifie donc (2). Réciproquement, tout système de valeurs des x suffisamment voisines des x' vérifiant (2) vérifie aussi (1). (1) et (2) sont équivalents et les coordonnées de tout point de α_2 vérifient (1). De même, les coordonnées de tout point de α_3, α_4, ... ou α_n vérifient (1). Les coordonnées de tout point de α vérifient donc (1).

Considérons un point quelconque M de l'espace dont

les coordonnées ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3 vérifient (1). Si μ est un nombre positif assez petit, les nombres

$$x'_0 + \mu\xi_0, \quad x'_1 + \mu\xi_1, \quad x'_2 + \mu\xi_2, \quad x'_3 + \mu\xi_3$$

sont les coordonnées d'un point B de (R_1) voisin de A_1. Les coordonnées de B vérifient (1) et B est situé dans α_1. Considérons la droite b de l'espace passant par A_1 et par B. M appartient à cette droite (§ 427). Il existe donc une suite de régions normales (R'_2), (R'_3), ..., (R'_m) jouissant des propriétés suivantes : (R_1) et (R'_2), (R'_2) et (R'_3), ..., (R'_{m-1}) et (R'_m) ont au moins un point commun ; il existe un point de la droite A_1B de (R_1) appartenant à $(R_1)(R'_2)$; si b_2 est la droite déterminée dans (R'_2) par la droite A_1B de (R_1), il existe un point de b_2 appartenant à $(R'_2)(R'_3)$; ...; enfin M appartient à la droite b_m déterminée dans (R'_m) par la droite b_{m-1} de (R'_{m-1}). Tous les points de la droite A_1B de (R_1) appartiennent à α_1. Il existe donc un point de α_1 appartenant à $(R_1)(R'_2)$ et il est clair que b_2 appartient au plan déterminé dans (R'_2) par α_1. b_2 appartient donc à α. En continuant à raisonner de la même façon, on trouve de proche en proche que b_3, b_4, ..., b_m appartiennent à α. M appartient donc à α et le théorème est complètement établi.

433. Théorème. *Toute équation linéaire et homogène à quatre inconnues rapportée à un système d'axes coordonnés rectangulaires représente un plan.*

Démonstration. Soit x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 un système de valeurs non toutes nulles des x qui vérifie l'équation donnée. Il existe un point A_1 ayant les x' comme coordonnées (§ 407). Dans une région normale (R_1) contenant A_1 l'équation donnée représente un plan α_1 (§ 392). En raisonnant comme au § 432 on voit que l'équation donnée représente le plan de l'espace déterminé par le plan α_1 de (R_1).

434. Théorème. *Si un point d'un plan α de l'espace appartient à une région normale* (R), *l'ensemble des points communs à* (R) *et à α est un plan de* (R).

Démonstration. Ce théorème résulte du § 432 et du § 392.

435. Théorème. *Si deux points non équivalents sont dans un plan, la droite qui les joint est dans ce plan.*

Démonstration. Ce théorème résulte des §§ 427 et 432.

Remarque. Considérons deux points équivalents A et A′ situés dans un plan α. Considérons un troisième point B de α distinct de A et de A′. La droite AB est située dans α, d'après le théorème que nous venons d'énoncer. AB passe par A′ (§ 426). Il en résulte qu'étant donnés deux points quelconques d'un plan, nous pouvons toujours les joindre par une droite située toute entière dans le plan. On exprime cette propriété en disant que le plan est une surface *connexe*.

436. Théorème. *L'ensemble des points communs à deux plans distincts constitue une droite.*

Démonstration. Ce théorème résulte du § 431.

437. Théorème. *Par trois points distincts non situés en ligne droite passe un plan et un seul.*

Démonstration. On voit aisément que la matrice de déterminants formée avec les coordonnées des trois points est différente de zéro. Cela étant, le théorème résulte des §§ 432 et 433.

438. Théorème. *Dans la géométrie elliptique proprement dite deux droites distinctes situées dans un même plan ont toujours un point commun et un seul. Dans la géométrie sphérique, deux droites distinctes situées dans un même plan ont deux points communs et deux seulement ; ces deux points sont équivalents.*

Démonstration. Soit α un plan, a et b deux droites de α. Prenons dans une région normale un système d'axes coordonnés rectangulaires. Soit

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \tag{1}$$

l'équation de α. Prenons deux points A et A′ non equivalents sur a et deux points B et B′ non équivalents sur b. Soit C un point non situé sur α. A, A′ et C déterminent un plan et B, B′ et C déterminent aussi un plan (§ 437). Soit

$$a'_0x_0 + a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 = 0 \tag{2}$$

l'équation du plan AA′C et

$$a''_0x_0 + a''_1x_1 + a''_2x_2 + a''_3x_3 = 0 \tag{3}$$

celle de BB′C. (1) et (2) sont les équations de la droite AA′, (1) et (3) celles de BB′. On a

$$\left\| \begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_0 & a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ a''_0 & a''_1 & a''_2 & a''_3 \end{matrix} \right\| \neq 0,$$

sinon (3) serait une conséquence de (1) et de (2) et les droites a et b ne seraient pas distinctes. Il y a donc un système de valeurs non toutes nulles de x_0, x_1, x_2, x_3 unique à moins d'un facteur de proportionnalité près qui vérifie (1), (2) et (3). Ce système de valeurs fournit un point d'intersection de a et de b s'il n'existe pas de points équivalents et deux points d'intersection équivalents de a et de b s'il existe des points équivalents.

C. q. f. d.

Remarque. Il résulte du théorème que nous venons d'établir que dans la géométrie elliptique proprement dite on peut toujours passer d'un point d'un plan à un autre point de ce plan en parcourant une droite de manière à ne pas franchir une droite donnée située dans ce plan. Le théorème II 3 du § 10 qui est vrai dans la géométrie euclidienne et dans la géométrie hyperbolique ne l'est donc plus dans la géométrie elliptique proprement dite.

439. Maintenant nous avons développé les principes de la géométrie elliptique suffisamment loin pour pouvoir réduire toutes les questions qui peuvent se présenter dans cette géométrie à des questions d'analyse ; nous avons aussi passé en revue les différentes propriétés de la droite et du plan de l'espace elliptique qui répondent aux propriétés de la droite et du plan de l'espace euclidien et hyperbolique énoncées dans les postulats de l'appartenance du § 10 et nous allons nous arrêter ici dans l'étude de la géométrie elliptique.

440. Présentons une dernière remarque avant de terminer.

Il est aisé de voir que dans les postulats du § 400 l'hypothèse de l'angle obtus ne joue aucun rôle spécial. On pourrait exposer un système de postulats entièrement

pareil à celui du § 400 en partant de l'hypothèse de l'angle droit ou de celle de l'angle aigu. Cela permettrait d'édifier la géométrie euclidienne et la géométrie hyperbolique en partant des branches de la géométrie générale basées respectivement sur les hypothèses de l'angle droit et de l'angle aigu par une méthode identique à celle que nous avons suivie pour la géométrie elliptique. On pourrait alors définir la droite et le plan dans la géométrie euclidienne et dans la géométrie hyperbolique exactement comme aux §§ 423 et 424. On pourrait aussi définir les relations d'ordre et de congruence indépendamment des régions normales et finalement démontrer que l'espace entier satisfait aux postulats du § 10, au postulat III 1 du § 3 et à l'hypothèse de l'angle droit ou aigu.

FIN.